

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THESES DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES : Mathématiques

présentées

A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

M. Guy CHATY

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

SUJETS :

1ère thèse : Cheminements remarquables dans les graphes :
existence, obtention, conservation.

2ème thèse : Sur les traitements de listes.

Soutenues le : 22 juin 1971

devant la Commission d'Examen

MM.	- VILLE	Président
	- BERGE	Examineurs
	- PICARD	
	- SIMON	

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THESES DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES : Mathématiques

présentées

A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

M. Guy CHATY

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

SUJETS :

1ère thèse : Cheminements remarquables dans les graphes :
existence, obtention, conservation.

2ème thèse : Sur les traitements de listes.

Soutenues le : 22 juin 1971 .

devant la Commission d'Examen

MM.	- VILLE	Président
	- BERGE	Examineurs
	- PICARD	
	- SIMON	



J'exprime toute ma reconnaissance à :

Monsieur le Professeur VILLE pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et l'honneur qu'il m'a fait d'accepter la présidence du jury de ma thèse,

Monsieur le Professeur Claude BERGE dont l'enseignement m'a été si précieux et qui a bien voulu être membre du jury.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur Claude-François PICARD pour les conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer au cours de l'élaboration de cette thèse.

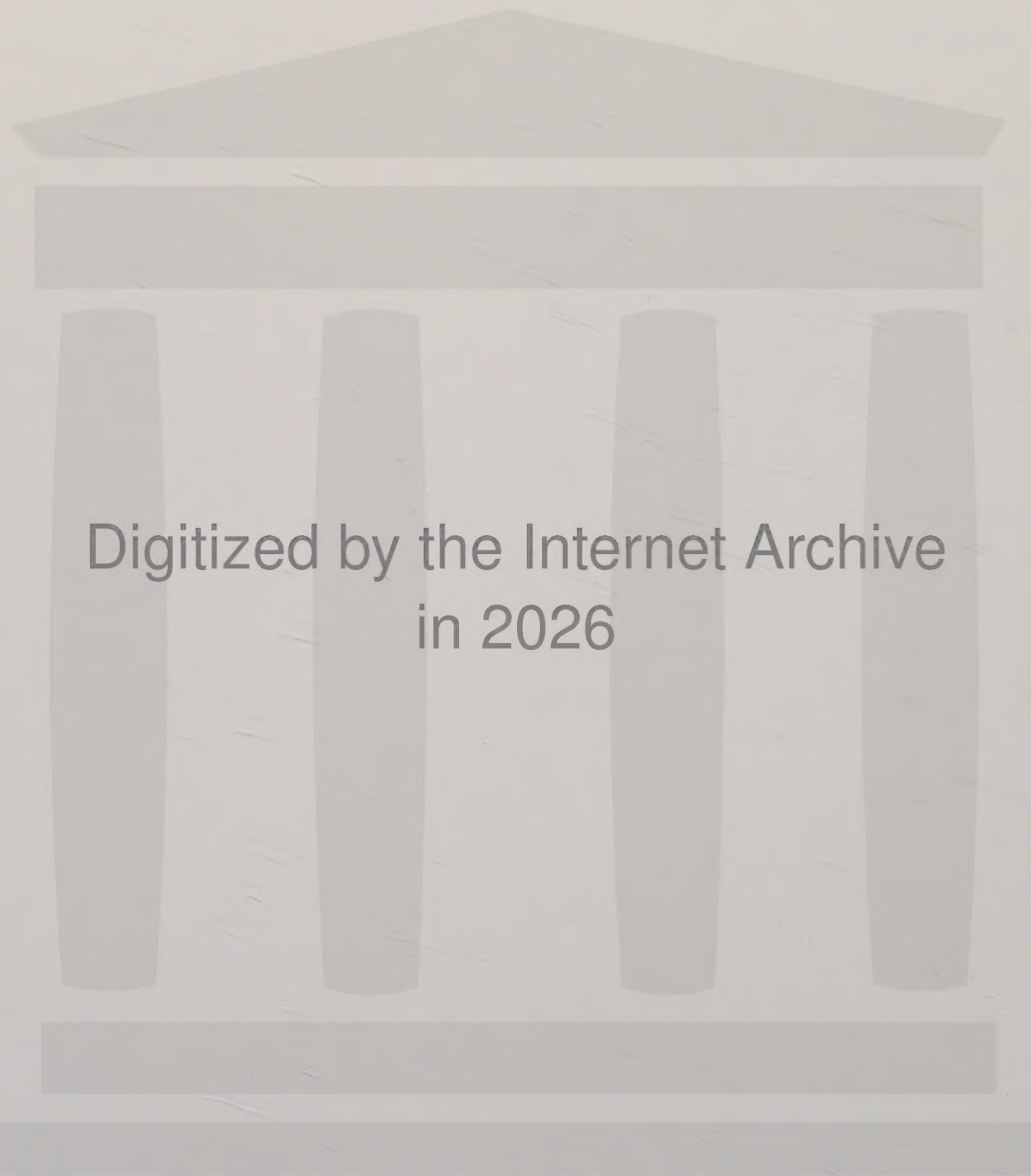
Je remercie vivement Monsieur le Professeur Jean-Claude SIMON qui, en me proposant un sujet de deuxième thèse, m'a permis d'élargir mes connaissances.

Je remercie Madame THUILLIER pour le soin qu'elle a apporté dans la dactylographie de mon manuscrit, et toutes les personnes qui ont participé à la réalisation matérielle de cette thèse.

E R R A T A

<u>Page</u>	<u>Ligne</u>	<u>au lieu de</u>	<u>lire</u>
IV	12	graphes fccm sans circuit	graphes sans circuit
4	2(à partir du bas)	pas se un circuit	pas se un cocircuit
6	2(à partir du bas)	$ X' \cap \mu $	$X' \cap \mu$
14	6	$G(X, U)$	$G = (X, U)$
14	7	$G \subset G'$	$G' \subset G$
18	1(à partir du bas)	SR. $\mathcal{G}'$	SR $\mathcal{G}'$
26	9	$\leq R T $	$\leq R T $
39	7(à partir du bas)	suit	suite
48	5(à partir du bas)	$\mathcal{E}_{\overline{K}}$	$\mathcal{E}'_{\overline{K}}$
51	8(à partir du bas)	vecteur colonne nulle	vecteur-colonne nul
75	2	On peut peut procéder	On peut procéder
83	3(à partir du bas)	une famille d'arcs	une famille d'arcs
89	6(à partir du bas)	$W - \{u\} \in \Pi_m(G_u)$	$W - \{u\} \in \Psi_m(G_u)$
112	1(à partir du bas)	$x^2 + px = q$	$x^2 + px + q = 0$
115	8	BALENSKI M.	BALINSKI M.
118	11	KARTELEYN P.W.	KASTELEYN P.W.
120	22	SEKAMINA M.	SEKANINA M.

Thèse G.CHATY



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556020_0027

INTRODUCTION

Une étude sur les graphes peut présenter deux aspects : l'un statique , l'autre dynamique ou opératoire, ces deux aspects pouvant d'ailleurs se rejoindre: le premier apparaissant comme une étape du second.

Les problèmes de cheminement tiennent une grande place dans les applications de la théorie des graphes. Les deux aspects cités plus haut y apparaissent: un graphe étant donné, on peut vouloir déceler certaines propriétés de cheminement, d'où l'intérêt des caractérisations, et, s'il ne possède pas les propriétés voulues, on peut vouloir le transformer , par adjonction , inversion ou suppression d'arcs par exemple, en un graphe qui les possède et ceci d'une manière économique; le problème est de savoir quels arcs choisir pour obtenir ces propriétés et éventuellement pour les conserver si d'autres nécessités nous conduisent à poursuivre les transformations. On peut vouloir aussi construire un graphe répondant à des propriétés de cheminement traduisant les relations entre les éléments d'information que l'on désire organiser et traiter.

Ces objectifs, qui sont les nôtres dans cette thèse, peuvent se résumer dans le triptyque : existence , obtention , conservation de cheminements remarquables.

Les graphes fortement connexes (pour toute paire $\{x,y\}$ de sommets, il existe un chemin $[x,y]$ et un chemin $[y,x]$) ont une importance particulière dans de nombreux problèmes. Si un graphe donné ne possède pas cette propriété, on est d'ailleurs souvent amené à travailler sur ses composantes fortement connexes. C'est le cas, par exemple, dans le problème de la suppression des circuits et dans la recherche des graphes α -minimaux, comme nous le verrons dans cette étude.

Les graphes fortement connexes c-minimaux (fccm) que nous avons mis en évidence en 1968 et auxquels nous consacrons une partie de ce travail

ont des propriétés extrémales , ce qui explique le rôle qu'ils peuvent jouer dans la recherche de graphes optimaux. Par définition, ils possèdent le minimum de circuits élémentaires relativement à la propriété de forte connexité. Ils se caractérisent par une propriété extrémale de cheminement : pour toute paire $\{x,y\}$ de sommets appartenant à un même circuit élémentaire, il existe un seul chemin élémentaire $[x,y]$ ou il existe un seul chemin élémentaire $[y,x]$. Ils se caractérisent aussi par l'existence d'un arbre de circulation : arbre maximal tel que tout cycle élémentaire associé à cet arbre est un circuit. (En 1967, CAMION a déduit de propriétés des modules unimodulaires qu'un graphe quelconque pouvait être orienté de telle sorte qu'il possède un arbre de circulation et, en 1968 , CRESTIN a donné un algorithme de construction d'une arborescence de circulation).

La notion duale de graphes fortement connexes est celle de graphes sans circuit (pour toute paire $\{x,y\}$ de sommets, il n'existe pas de chemin $[x,y]$ ou il n'existe pas de chemin $[y,x]$). Ces graphes jouent également un rôle important dans les applications. Un des problèmes qui retient notre attention est, étant donné un graphe possédant des circuits, de trouver des arcs en nombre minimal tels que leur suppression (ou leur inversion) permette d'obtenir un graphe sans circuit. Ce problème difficile a été évoqué et abordé de nombreuses fois sans avoir reçu de solutions pleinement satisfaisantes (FULKERSON et RYSER, 1961 ; SLATER pour les tournois, 1961 ; GRINBERG et DAMBIT, 1965 ; PICARD , 1965 ; RUSSEL REMAGE et THOMPSON, 1966 ; BARBUT, 1966 , etc...). Il peut être étudié directement ou posé en termes de recouvrement (les problèmes combinatoires qui relèvent de ce dernier thème sont nombreux et la bibliographie riche). Nous examinons plusieurs voies d'approche et apportons des éléments de réponse. Cette étude nous permet, en outre, de contribuer à la connaissance de la structure des circuits d'un graphe.

La notion duale de graphes fccm est celle de graphes sans circuit co-minimaux : graphes sans circuit dont le nombre de cocircuits élémentaires est minimal ; leur étude révèle elle aussi des propriétés extrémales intéressantes.

Le chapitre 1 est consacré à des techniques qui nous serviront dans la suite et contient des résultats dont certains ont une portée qui déborde les sujets étudiés. On rappelle des notions contenues dans les ouvrages de BERGE , GHOUILA-HOURI , HARARY , PICARD , ROY , RYSER , etc..; et on en introduit de nouvelles.

Une première partie du chapitre 1 donne les définitions et notations premières : 1-graphes et p-graphes, terminologie (entre autres : graphe Q-fortement connexe, pseudo-branche), nombres relatifs aux graphes.

La partie II concerne les modules des flots et des tensions d'un graphe et plus généralement les sous-modules unimodulaires de $\mathbb{Z}^m$.

La partie III précise les notions de μ -équivalence et de μ -minimalité (on peut dire brièvement qu'un graphe est μ -minimal si on ne peut plus supprimer d'arcs sans modifier les possibilités de cheminement ; un graphe partiel d'un graphe donné est α -minimal s'il offre les mêmes possibilités de cheminement que le graphe donné et a le nombre minimal d'arcs relativement à cette propriété).

On présente dans la partie IV une opération (Ψ) qui, définie pour tout p-graphe, n'affecte pas essentiellement la structure des chemins et des circuits du graphe auquel elle est appliquée, tout en le "simplifiant" éventuellement. Les notions de recouvrement, de systèmes de représentants, de couplage, sont abordées dans la partie V en termes d'ensembles, de matrices, d'hypergraphes. On rappelle des résultats dans ces cadres généraux et leurs conséquences pour les graphes en ce qui concerne: couverture, support, couplage des arêtes, ensemble stable ou absorbant. On rappelle la construction d'une matrice qui permet d'obtenir un minorant du nombre de transversalité d'un hypergraphe. Dans la partie VI, consacrée aux arbres et arborescences, on donne une représentation d'un arbre suivant le rang de ses sommets et on introduit la notion de veines d'un arbre. On montre que tout chemin d'un arbre est inclus dans une veine de cet arbre.

Le chapitre 2 est consacré aux graphes fccm et aux graphes sans circuit co-minimaux. Dans les parties I et II, on en donne plusieurs caractérisations, on examine leurs propriétés; on montre que les propriétés de c-minimalité et de co-minimalité sont conservées par l'adjonction de certains arcs ou par l'opération Ψ .

Dans la partie I, on étudie les différentes manières d'obtenir un graphe fccm : à partir d'un arbre (en tenant compte des contraintes posées), à partir d'un graphe quelconque, par une méthode matricielle (CAMION) ou par un algorithme (CRESTIN), ce dernier donnant une arborescence de circulation. On remarque qu'il existe des graphes fccm sans arborescence de circulation.

Dans la partie II, on distingue, parmi les graphes fccm sans circuit co-minimaux, ceux qui possèdent ou non la propriété : par chaque arc passe un cycle élémentaire. On montre comment transformer les premiers par inversion d'arcs en graphes fccm et réciproquement; si l'on effectue sur les deuxièmes une transformation analogue on obtient des graphes constitués de sous-graphes fccm et d'arcs par lesquels ne passe pas de cycle élémentaire.

Dans la partie III, les propriétés de c-minimalité et de co-minimalité et le passage de l'une à l'autre sont généralisés aux sous-modules unimodulaires de $\mathbb{Z}^m$.

Les parties IV et V sont consacrées à la conservation de la c-minimalité et de la co-minimalité dans l'opération de suppression d'arcs.

Dans la partie IV, on démontre que tous les graphes partiels fortement connexes d'un graphe fccm sont fccm, on donne une construction d'un graphe partiel fortement connexe α -minimal d'un graphe fccm et des conditions nécessaires ou suffisantes pour qu'un graphe fccm soit fortement connexe μ -minimal. On introduit les graphes fortement connexes hyper c-minimaux (fchcm) : graphes fortement connexes non μ -minimal admettant un graphe partiel fccm; on donne des conditions nécessaires ou suffisantes pour qu'un graphe fortement connexe soit fchcm. On conjecture que, parmi tous les graphes

partiels fccm d'un graphe fchcm G , ceux qui ont le minimum d'arcs sont des graphes partiels fortement connexes α -minimaux de G . On donne une méthode de recherche de ces graphes partiels fccm qui ont le minimum d'arcs, recherche qui généralise celle des circuits hamiltoniens effectuée par ROY.

Cette étude des graphes fchcm apporte donc une contribution à la connaissance de la structure des graphes fortement connexes et des graphes α -minimaux (ces derniers, intéressants en ce sens qu'ils fournissent les solutions les plus économiques pour la conservation des propriétés relationnelles, ont déjà fait l'objet de recherches algorithmiques qui n'ont pas encore donné pleinement satisfaction; l'algorithme proposé en 1969 par Moyles et Thompson pour la recherche d'un graphe α -minimal de chaque composante fortement connexe repose sur des résultats erronés comme le montrent les contre-exemples de ROY et de nous-même).

Dans la partie V, on obtient une nouvelle caractérisation des graphes sans circuit co-minimaux (le squelette est un arbre). Dans la partie VI, on donne un algorithme de recherche d'une famille minimale de circuits élémentaires d'un graphe fortement connexe G recouvrant les arcs de G , qui peut s'appliquer aux graphes fccm pour la recherche d'un arbre de circulation. On étudie aussi le recouvrement des arcs d'un graphe sans circuit par des cocircuits élémentaires.

Le chapitre 3 est consacré au problème de la suppression des circuits d'un graphe. On l'aborde dans la partie II en considérant les circuits comme des ensembles d'arcs. On est alors conduit à étudier l'hypergraphe H des circuits élémentaires d'un graphe. On montre que H est conforme mais que son dual H^* ne l'est pas en général. On propose une axiomatique vérifiée par H . On s'intéresse à la relation qui lie $\delta(G)$, nombre minimal d'arcs qu'il est nécessaire de supprimer dans le graphe G pour supprimer tous les circuits et $\eta(G)$: nombre maximal de circuits élémentaires disjoints deux à deux au sens des arcs. On a toujours $\delta(G) \geq \eta(G)$; on montre que l'égalité a lieu dans certains cas. On recense les classes d'algorithmes

connus pour la recherche d'un ensemble transversal optimal d'un hypergraphe et les informations apportées pour cette recherche par certains résultats de EDMONDS et RYSER . On propose une méthode qui permet de trouver une solution voisine de l'optimale.

Dans la partie III, on étudie directement le problème de la suppression des circuits sans passer par l'hypergraphe H . Le graphe G considéré peut être supposé fortement connexe, sans boucle ni transmetteur . On examine l'intérêt qu'il y a à faire intervenir les coupes minimales de G . A ce propos, on réfute des conjectures de ROY et on en propose une plus faible qui, si elle est vérifiée, fournit une méthode de recherche d'une solution optimale. On pose ensuite le **problème** en termes de recherche d'une relation d'ordre total à distance minimale de la relation définie par G (cf. BARBUT) . On donne des conditions nécessaires que doit satisfaire une telle relation : il en résulte un algorithme.

Dans le chapitre 4 , réservé aux tournois , on examine ce que deviennent ces conditions nécessaires ; on les compare aux règles de SLATER (La recherche de $\delta(G)$ dans le cas des tournois est liée à certaines questions de sciences sociales comme la mesure du "degré de logique" des choix d'un sujet). Dans ce même chapitre, on étudie les propriétés des tournois fccm et on donne le nombre de chemins hamiltoniens de tels graphes. (formule de récurrence, expression générale, comportement asymptotique).

N.B. Les propositions sont numérotées à l'intérieur de chaque partie de chapitre. Si, dans un chapitre, on fait référence à une proposition d'un autre chapitre, le numéro de ce dernier est indiqué.

TABLE DES MATIERES

Pages

CHAPITRE 1 - TECHNIQUES ET RESULTATS LIMINAIRES.

I. <u>DEFINITIONS ET NOTATIONS PREMIERES.</u>	1
I.1. Graphes	1
I.2. Terminologie et Notations	3
I.3. Nombres relatifs aux graphes	8
II. <u>FLOTS ET TENSIONS , CIRCUITS ET COCIRCUITS.</u>	9
II.1. Module des flots	9
II.2. Module des tensions	12
II.3. Sous-modules unimodulaires de $\mathbb{Z}^m$	13
III. <u>μ-EQUIVALENCE , μ-MINIMALITE.</u>	14
IV. <u>OPERATION Ψ.</u>	15
V. <u>RECOUVREMENT.</u>	18
V.1. Ensembles, matrices, hypergraphes	18
V.2. Cas particuliers	20
V.3. Classe $\mathcal{G}(R,S)$	22
VI. <u>ARBRE ET ARBORESCENCE.</u>	24

CHAPITRE 2 - GRAPHES FORTEMENT CONNEXES C-MINIMAUX ET. GRAPHES SANS CIRCUIT CO-MINIMAUX.

I. <u>GRAPHES FCCM</u>	27
I.1. Définition	27
I.2. Caractérisation	28
I.3. Propriétés	31
I.4. Obtention	36
I.5. Nouvelle caractérisation	41

II. <u>GRAPHES SANS CIRCUIT CO-MINIMAUX.</u>	44
II.1. Définition	44
II.2. Caractérisation	45
II.3. Propriétés	46
II.4. Obtention	50
III. <u>SOUS-MODULES UNIMODULAIRES DE $\mathbb{Z}^m$ ρ-MINIMAUX.</u>	52
IV. <u>SUPPRESSION D'ARCS ET C-MINIMALITE.</u>	53
IV.1. C-minimalité et μ -minimalité	54
IV.2. Arcs supprimables d'un graphe fccm.	54
IV.2.1. Graphes partiels fortement connexes d'un graphe fccm	54
IV.2.2. Graphes partiels fortement connexes α -minimaux d'un graphe fccm	56
IV.2.3. Arcs supprimables et arbres de circulation	57
IV.2.4. Graphes fccm μ -minimaux	61
IV.3. Graphes fortement connexes hyper-c-minimaux	62
IV.3.1. Définition et conditions d'hyper-c-minimalité	62
IV.3.2. Graphes partiels d'un graphe fchcm	66
V. <u>SUPPRESSION D'ARCS ET CO-MINIMALITE.</u>	71
V.1. Arcs supprimables d'un graphe sans circuit co-minimal	71
V.2. Squelette d'un graphe sans circuit co-minimal	72
VI. <u>RECHERCHE DES ARBRES DE CIRCULATION ET DES COARBRES DE COCIRCULATION.</u>	
VI.1. Recouvrement des arcs par des circuits.	73
VI.2. Application aux graphes fccm.	74
VI.3. Recouvrement des arcs par des cocircuits.	75
 <u>CHAPITRE 3 - SUPPRESSION DES CIRCUITS.</u>	
I. <u>PROBLEME.</u>	77
II. <u>CIRCUITS : ENSEMBLE D'ARCS.</u>	78
II.1. Introduction	78

II.2. Cas des circuits à liaisons simples	78
II.3. Etude de l'hypergraphe des circuits	80
II.4. Axiomatique	85
II.5. Algorithmes	86
III. <u>ETUDE DIRECTE.</u>	88
III.1. Ensembles Δ_m et coupes minimales	88
III.2. Intérêt de l'opération Ψ	94
III.3. Relations optimales	94
III.3.1. Introduction	94
III.3.2. Propriétés	96
III.3.3. Conditions nécessaires d'optimalité	97
III.3.4. Algorithme de recherche d'une relation optimale	101
<u>CHAPITRE 4 - TOURNOIS.</u>	
I. <u>SUPPRESSION DES CIRCUITS.</u>	102
I.1. Relations optimales	102
I.2. Applications	104
I.2.1. Règles de Slater	104
I.2.2. Algorithmes	106
II. <u>TOURNOIS FCCM.</u>	107
II.1. Propriétés	107
II.2. Nombre de chemins hamiltoniens	109
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	115

CHAPITRE 1

TECHNIQUES ET RESULTATS LIMINAIRES

I. DEFINITIONS ET NOTATIONS PREMIERES.

I.1. Graphes

1-graphe $G = (X, U)$. Couple constitué par un ensemble X supposé ici fini et par un ensemble $U \subset X^2$. Les éléments de X sont les sommets de G , les éléments de U sont les arcs de G .

On peut représenter les sommets de G par des points et un arc (x, y) de G par une flèche allant du sommet x vers le sommet y .



On dit qu'un arc (x, y) lie le sommet x au sommet y .

Un arc (x, x) est une boucle.

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire dans X :

$$x \mathcal{R} y \text{ si et seulement si } (x, y) \in U.$$

G est dit graphe de $\mathcal{R}$.

Soit Γ la correspondance de X dans X définie par :

$$\Gamma(x) = \{y \mid (x, y) \in U\}$$

G se note aussi $G = (X, \Gamma)$.

p-graphe. C'est une généralisation de la notion de 1-graphe. Dans un p -graphe, il peut y avoir au plus p arcs (x, y) liant le sommet x au sommet y . [Berge, 6]. On peut noter ces arcs : $(x, y)_1, (x, y)_2, \dots, (x, y)_q$ ($q \leq p$).

Un p-graphe peut être défini comme l'union de p 1-graphes $G_p = (X, \Gamma_p)$. On le note alors : $G = (X, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p)$. [Picard, 5]

Si ce procédé engendrant un p-graphe G n'est pas déterminant pour l'étude de G , on peut définir G comme un triplet (X, U, f) : X ensemble des sommets, U ensemble des arcs, f application de U dans X^2 [Ghouila-Houri, 4] avec ;

$$|f^{-1}\{(x,y)\}| \leq p \text{ pour tout } (x,y) \in X^2.$$

On notera simplement $G = (X, U)$.

Si le nombre p n'intervient pas explicitement dans l'étude d'un p-graphe G , celui-ci est aussi appelé multigraphe orienté si $p > 1$ (graphe orienté si $p=1$). Un des procédés d'obtention d'un p-graphe G consiste, étant donné un p-graphe G' , à faire correspondre à tout arc $(x,y)_i$ de G' , la paire $\{x,y\}_i$ appelée arête de G' et à choisir pour chaque paire $\{x,y\}_i$ un arc de G : soit $(x,y)_i$, soit $(y,x)_i$; on dit qu'on a modifié l'orientation de G' ou qu'on a orienté le multigraphe G'' constitué par les arêtes de G' . G'' est dit multigraphe induit par le multigraphe orienté G' . On réserve le nom de graphe simple au multigraphe G'' induit par un 1-graphe G' antisymétrique sans boucle. Un graphe simple est noté (X, E) .

Exemple



1-graphe



1-graphe
antisymétrique
sans boucle G'_1



graphe simple
induit par G'_1



3-graphe G'



multigraphe G''
induit par G'



3-graphe G obtenu
par réorientation
de G' ou orientation de G''
(G est aussi un 2-graphe)

Dans le cours de cet exposé, on utilisera souvent le mot graphe pour p -graphe. L'acception sera précisée chaque fois que c'est nécessaire.

I.2. Terminologie et notations.

La terminologie utilisée ici est en général celle de Berge , Picard et Roy. Dans ce paragraphe et les suivants correspondant à des notions particulières, nous allons rappeler certains termes ou en introduire de nouveaux, avec les propriétés correspondantes.

I.2.1. Soit G un p -graphe. $G = (X, U)$.

arbre maximal de G : graphe partiel de G qui est un arbre. ⁽¹⁾

arbre de circulation de G : s'il existe, arbre maximal tel que tout cycle élémentaire associé à cet arbre est un circuit.

THEOREME I.1

Tout multigraphe peut être orienté de telle sorte que le graphe obtenu possède un arbre de circulation. [Camion, 6].

Coarbre K : graphe partiel de G ; si $K = (X, U_1)$, $H = (X, U - U_1)$ est un arbre maximal de G . Réciproquement si $H = (X, V)$ est un arbre maximal de G , $K = (X, U - V)$ est un coarbre de G . Nous noterons $K = \overline{H}$, $H = \overline{K}$.

Coarbre de circulation : coarbre tel que tout cocycle élémentaire associé à ce coarbre est un cocircuit.

$d_G^+(x)$: demi-degré extérieur du sommet x

$d_G^-(x)$: demi-degré intérieur du sommet x

$d_G(x)$: degré du sommet x . $d_G(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)$

(si on ajoute une boucle en un sommet x , on augmente son degré de 2).

$\omega^+(A)$ ($A \subset X$) : ensemble des arcs dont l'extrémité initiale est dans A et l'extrémité terminale dans $X - A$.

(1) 1-graphe connexe sans cycle.

$\omega^-(A)$: définition analogue. $\omega^-(A) = \omega^+(X-A)$.

$\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A)$.

Coupe de G : ensemble d'arcs de la forme $\omega^+(A)$ ou $\omega^-(A)$

I.2.2. Un chemin d'extrémité initiale x_1 et d'extrémité terminale x_n sera noté $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ou plus simplement $[x_1, x_n]$

Un circuit passant par les sommets $x_1, x_2, \dots, x_n$ sera noté $[x_1, x_2, \dots, x_n, x_1]$ ou $[x_1, x_n, x_1]$.

On pourra, si c'est nécessaire, indiquer un ou plusieurs sommets ou un ensemble de sommets par lesquels passe le chemin ou le circuit considéré : $[x_1, \dots, y_1, \dots, x_n]$, $[x_1, X_1, x_n]$.

Une chaîne sera notée $]x_1, x_n[$. Un cycle sera noté $]x_1, x_n, x_1[$

Si on s'intéresse à un chemin en tant que suite d'arcs, on le notera $(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

I.2.3. Graphes particuliers.

a) Graphe fortement connexe $G = (X, U)$: pour tout $x, y \in X$, il existe un chemin $[x, y]$ et un chemin $[y, x]$.

Proposition I.1. Pour un graphe G connexe avec au moins un arc, les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) G est fortement connexe
- 2) par tout arc de G passe un circuit
- 3) G n'a pas de cocircuit. [Berge, 2]

b) Graphe sans circuit.

Proposition I.2. Pour un graphe G avec au moins un arc, les conditions suivantes sont équivalentes :

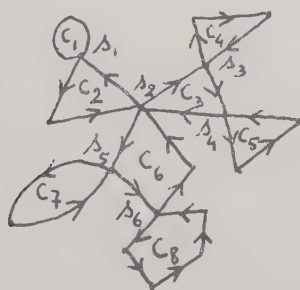
- 1) G est un graphe sans circuit
- 2) par tout arc de G passe un circuit. [Berge, 2]

c) Tournoi : 1-graphe complet et antisymétrique.

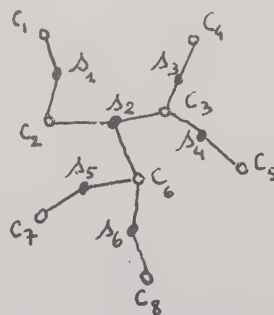
d) Graphe Q-fortement connexe : 1-graphe connexe G constitué par un ensemble C de circuits élémentaires ayant deux à deux au plus un sommet commun, aucun cycle élémentaire autre que ces circuits n'existant dans G .

Remarque : le graphe simple biparti $G' = (C, S, E)$ tel que S est l'ensemble des sommets de G communs à plusieurs circuits élémentaires de G et tel que $\{c_i, s_j\} \in E$ si et seulement si $s_j \in c_i$ dans G , est induit par un arbre. Les circuits élémentaires de G représentés dans G' par un sommet pendant seront dit extrémaux.

Exemple :



G



G'

Proposition I.3. Un graphe G est un graphe Q-fortement connexe si et seulement si il est fortement connexe et possède la propriété (Q) : pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets de G' appartenant à un même circuit élémentaire, il existe dans G un chemin élémentaire unique $[x, y]$ et un chemin élémentaire unique $[y, x]$.

Si G est un graphe Q-fortement connexe, il est fortement connexe et possède la propriété (Q) :

immédiat .

Si $G = (X, U)$ est fortement connexe et possède la propriété (Q), G est un 1-graphe, connexe. Par tout arc de G , passe un seul circuit élémentaire, donc les circuits élémentaires de G sont disjoints au sens des arcs. Supposons que G ait un cycle élémentaire autre que ses circuits élémentaires : $[x_1, x_2, \dots, x_p, x_1]$. $(x_1, x_p) \in U$ ou $(x_p, x_1) \in U$; supposons que $(x_p, x_1) \in U$. Par

(x_p, x_1) passe un seul circuit élémentaire constitué par cet arc et un chemin élémentaire $[x_1, x_p]$. On peut construire un deuxième chemin élémentaire $[x_1, x_p]$ en utilisant pour chaque $i \in \{1, \dots, p-1\}$, soit l'arc (x_i, x_{i+1}) si $(x_i, x_{i+1}) \in U$, soit le chemin élémentaire $[x_i, x_{i+1}]$ qui avec (x_{i+1}, x_i) constitue le seul circuit élémentaire passant par (x_{i+1}, x_i) . Ce qui est contraire à la propriété (Q).

Remarque : Dans l'énoncé de la propriété (Q), on peut supprimer : "appartenant à un même circuit élémentaire".

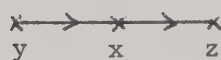
I.2.4. Sommets et sous-graphes particuliers.

Soit un p -graphe $G = (X, U)$.

noeud de G : sommet x tel que $d_G(x) > 2$

anti-noeud de G : sommet x tel que $d_G(x) \leq 2$

transmetteur de G : sommet x tel que $d_G^+(x) = d_G^-(x) = 1$, aucune boucle n'existant en x .



le transmetteur x sera noté (y, x, z) .

Proposition I.4. Dans un graphe G fortement connexe x est un transmetteur si et seulement si x est un anti-noeud immédiat.

branche de G : chemin dont tous les sommets sont des transmetteurs sauf les extrémités qui sont des noeuds et qui sont distinctes.

pseudo-branche de $G = (X, U)$: sous-graphe L de G constitué par un chemin μ et des graphes Q -fortement connexes avec les conditions suivantes :

i) si l'on supprime ces graphes Q -fortement connexes, L est transformé en une branche et une seule de chemin μ .

ii) chacun de ces graphes Q -fortement connexes (X', U') est tel que $|X' \cap \mu| = \{x\}$ avec $\omega_G(X-x) \subset U'$.

point d'articulation de G : sommet x tel que le sous-graphe

engendré par $X-x$ a davantage de composantes connexes que G .

(Un graphe G est dit inarticulé s'il est connexe et n'a pas de point d'articulation).

bloc de G . Sous-graphe inarticulé de G engendré par $A \subset X$, A étant maximal pour cette propriété.

Proposition I.5. Deux blocs distincts d'un graphe G n'ont aucun arc commun et ont au plus un sommet commun. [Harary, 2]

Proposition I.6. Un graphe connexe G est fortement connexe si et seulement si ses blocs sont fortement connexes. [Harary, 2]

source : sommet n'ayant pas de prédécesseur.

puits : sommet n'ayant pas de successeur.

base β : sous-ensemble de sommets possédant les propriétés :

- 1) il n'existe pas de chemin reliant deux sommets distincts, quelconques de β . β est maximale pour cette propriété.
- 2) tout sommet $x \notin \beta$ a au moins un descendant dans β .

anti-base α - définition analogue (remplacer descendant par ascendant).

Proposition I.7. Tout graphe admet une base et une anti-base.

Proposition I.8. Tout graphe G sans circuit admet une base (resp. anti-base) unique constituée par l'ensemble des puits (resp. sources) de G .

Proposition 1.9. Soit un graphe G non fortement connexe. Le nombre minimum d'arcs qu'il faut lui ajouter pour le rendre fortement connexe est égal à $\max\{a(G), b(G)\}$, $a(G)$ (resp. $b(G)$) étant le cardinal d'une anti-base (resp. base) de G . [Roy, 1]

I.2.5. Soit $G = (X, \Gamma)$ un 1-graphe sans circuit. Posons :

$$C_0 = X - \Gamma X$$

$$C_1 = (X - C_0) - \Gamma(X - C_0)$$

.....

$$C_r = (X - C_0 - \dots - C_{r-1}) - \Gamma(X - C_0 - \dots - C_{r-1})$$

.....

On définit ainsi une partition de X en $p+1$ classes non vides: $C_0, C_1, \dots, C_2, \dots, C_p$. Un sommet est dit de rang r s'il est dans C_r .

Proposition I.10. Dans un 1-graphe sans circuit, un sommet est de rang r si et seulement si le plus long chemin qui l'admet pour extrémité terminale est formé de r arcs. [Roy, 1]

Proposition I.11. Dans un graphe sans circuit, il existe une numérotation des sommets dans laquelle le numéro de chacun d'eux est inférieur à tous ceux de ses descendants et supérieur à tous ceux de ses ascendants. [Roy, 1]

Nous appellerons cette numérotation, numérotation ordonnée.

I.3. Nombres relatifs aux graphes.

I.3.1. $G = (X, U)$ est un p -graphe ayant au moins un circuit.

$\xi(G)$: nombre de circuits élémentaires de G .

$\delta(G)$: nombre minimal d'arcs qu'il faut supprimer dans G pour obtenir un graphe sans circuit.

$\eta(G)$: nombre maximal de circuits élémentaires de G disjoints 2 à 2 au sens des arcs.

$v_G(V)$ ($V \subset U$) : nombre de circuits élémentaires qui passent par un arc au moins de V .

I.3.2. $G = (X, U)$ est un p -graphe fortement connexe.

$r(G)$: nombre minimal d'arcs qu'il faut supprimer dans G pour obtenir un graphe partiel non fortement connexe.

I.3.3. $G = (X, U)$ est un p -graphe.

$\nu(G)$: nombre cyclomatique de G .

$\lambda(G)$: nombre cocyclomatique de G .

Si G a n sommets, m arcs et p composantes connexes:

$$\nu(G) = k = m - n + p$$

$$\lambda(G) = l = n - p$$

$t(G)$: nombre minimal de chemins élémentaires recouvrant U .
 $a(G)$: cardinal d'une anti-base.
 $b(G)$: cardinal d'une base.

1.3.4. $G = (X, E)$ est un graphe simple.

$\alpha(G)$: nombre de stabilité.
 $c(G)$: cardinal d'une couverture de cardinal minimal.
 $\sigma(G)$: cardinal d'un support de cardinal minimal.
 $\Pi(G)$: cardinal d'un couplage des arêtes de cardinal maximal.
 $\beta(G)$: nombre d'absorption (ou de stabilité externe).

II. FLOTS ET TENSIONS, CIRCUITS ET COCIRCUITS.

Soit G un p -graphe connexe de n sommets et m arcs.

II.1. Module des flots.

II.1.1. Matrice cyclomatique.

Tout cycle c de G est identifié à un vecteur $(c_1, \dots, c_m)$ de $\mathbb{Z}^m$; le mot cycle désigne indifféremment un cycle de G ou le vecteur correspondant de $\mathbb{Z}^m$ [Berge, 2].

Soit Φ le module des flots de G , sous-module de $\mathbb{Z}^m$. Soit B une base de Φ formée de $k = m - n + 1$ cycles élémentaires indépendants, et $C = (c_i^j)$ une matrice cyclomatique correspondante (les k lignes correspondent aux k cycles c_i^j de B et les m colonnes aux m arcs de α_i de G).

Proposition II.1. Soit C une matrice cyclomatique quelconque. C ne possède aucun vecteur-colonne nul si et seulement si par chaque arc de G passe un cycle élémentaire au moins.

En effet, tout cycle de G est une combinaison linéaire des lignes de C . Si le vecteur-colonne $|\alpha_i|$ n'est pas nul, par α_i

pas un cycle de B . S'il est nul, par α_i ne passe aucun cycle de G .

II.1.2. Matrice de circulation.

Si Φ possède une base B de k circuits élémentaires indépendants, une matrice cyclomatique correspondante est appelée matrice de circulation et notée C .

Proposition II.2. Si G est fortement connexe, Φ a une base B de k circuits élémentaires indépendants [Berge, 2] donc il existe une matrice de circulation.

II.1.3. Matrice cyclomatique fondamentale.

Une matrice cyclomatique fondamentale C_H est obtenue à partir d'un arbre maximal de G . [Berge, 2]. Elle est formée de deux sous-matrices I_k , matrice unité $k \times k$ et

$$\bar{C}_H = (c_i^j), \quad k+1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Nous noterons :

$$C_H = (I_k, \bar{C}_H).$$

Les colonnes de I_k correspondent aux arcs du coarbre $\bar{H}$ associé à H dans G .

C_H est une matrice échelon (elle contient parmi ses colonnes les k vecteurs unités). Réciproquement :

Proposition II.3. Si une matrice cyclomatique est une matrice échelon, la base B correspondante peut être obtenue à partir d'un arbre maximal de G .

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, k vecteurs unités distincts deux à deux extraits des colonnes de C . Le graphe H constitué par les $n-1$ arcs $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_{k+m}$ est sans cycle. En effet G ne

contient pas de cycle dont les arcs appartiennent uniquement à H : il n'y en a pas dans B et aucune combinaison linéaire à coefficients non tous nuls des lignes de C ne peut donner un cycle où tous les arcs $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ seraient exclus. Donc H est un arbre maximal, à partir duquel B peut être obtenue.

Remarquons qu'il peut y avoir plusieurs H .

Une matrice cyclomatique fondamentale C_H étant donnée :

Proposition II.4. *Tout circuit élémentaire c de G est une combinaison linéaire à coefficients égaux à 0 ou 1 des lignes de C_H .*

En effet : c est une combinaison linéaire des lignes de C_H :

$$c_i = \sum_{j \in J} \lambda_j c_i^j, \quad i \in Y = \{1, \dots, m\},$$

$$J = \{1, \dots, k\}$$

Puisque C_H est une matrice échelon :

$$\forall j_0 \in J, \exists i \in Y, c_i^{j_0} = 1, c_i^j = 0, j \in J - \{j_0\}$$

Donc :

$$\forall j_0 \in J, \exists i \in Y, c_i = \lambda_{j_0} c_i^{j_0} + \sum_{j \in J - \{j_0\}} \lambda_j c_i^j = \lambda_{j_0}$$

Comme c est un circuit élémentaire, λ_{j_0} est égal à 0 ou 1 et ceci pour tout $j_0 \in J$.

Si H est un arbre de circulation, C_H est appelée matrice de circulation fondamentale et notée $\mathcal{C}_H$.

II.1.4.

Proposition II.5. Tout flot positif non nul est une combinaison linéaire positive de circuits élémentaires. [Berge, 2]

II.2. Module des tensions.

On a des notions et des résultats duaux en considérant le module des tensions Θ :

cocycle d

base E de Θ

matrice cocyclomatique D , $l \times m$

matrice de cocirculation $\mathcal{D}$

matrice cocyclomatique fondamentale $D_k = (\bar{D}_K, I_1)$

$$\bar{D}_K = (d_i^j) \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad , \quad 1 \leq j \leq l$$

matrice de cocirculation fondamentale $\mathcal{D}_K$.

Proposition II.6. Si G est sans circuit, Θ a une base E de l cocircuits élémentaires indépendants [Berge, 2], donc il existe une matrice de cocirculation.

Proposition II.7. Si une matrice cocyclomatique D est une matrice échelon, la base E correspondante peut être obtenue à partir d'un coarbre de G .

Soit $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n$, l vecteurs unités distincts deux à deux extraits des colonnes de $\mathcal{D}$. Le graphe K constitué par les k arcs $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ est sans cocycle: c'est un coarbre.

Proposition II.8. Soit C une matrice cyclomatique et D une matrice cocyclomatique de G . On a $C \cdot {}^t D = 0$ [Berge, 2] (${}^t D$ est la transposée de D).

Proposition II.9. Toute tension positive non nulle est une combinaison linéaire positive de cocircuits élémentaires.

Remarquons qu'une matrice cocyclomatique n'a pas de vecteur-

colonne nul si G a au moins un arc : par tout arc, passe un cocycle élémentaire.

II.3. Sous-modules unimodulaires de $\mathbb{Z}^m$.

Les modules des flots et des tensions d'un graphe sont des cas particuliers de sous-modules unimodulaires de $\mathbb{Z}^m$ [Camion, 4]. Plusieurs résultats énoncés plus haut peuvent s'écrire dans ce cadre plus général.

Soit M un sous-module unimodulaire de $\mathbb{Z}^m$. Le support d'un vecteur x de M est l'ensemble $s(x) = \{i \mid i \in Y \text{ et } x_i \neq 0\}$ avec $Y = \{1, 2, \dots, m\}$. Un élément x non nul de M est dit minimal si son support est minimal dans l'ensemble ordonné par inclusion des supports des éléments non nuls de M [Camion, 4]. C'est un générateur si, de plus, ses composantes sont égales à 0, 1 ou -1.

Pour les graphes, un cycle (resp. cocycle) élémentaire est un générateur de Φ (resp. Θ) ; un circuit (resp. cocircuit) élémentaire est un générateur positif de Φ (resp. Θ).

Soit $A = (u_i^j)$ une matrice échelon $\rho \times m$ dont les ρ lignes u^j sont des générateurs de M et constituent une base B de M .

Proposition II.10. *Tout générateur positif u de M est une combinaison linéaire à coefficients égaux à 0 ou 1 des lignes de A .*

La démonstration se fait comme pour la proposition II.4 en remplaçant c par u .

Proposition II.11. *Tout vecteur positif non nul de M est une combinaison linéaire positive de générateurs positifs de M .*

[Camion, 5]

III. μ -EQUIVALENCE , μ -MINIMALITE.

III.1. Graphe partiel.

Soit $\mathcal{G}(X)$ l'ensemble des graphes ayant le même ensemble X de sommets.

Nous définissons dans $\mathcal{G}(X)$ une relation d'ordre de la manière suivante : Soit $G(X,U)$ et $G' = (X,U')$ deux graphes de $\mathcal{G}(X)$,

$$G \subset G' \text{ si et seulement si } U' \subset U .$$

G' est dit graphe partiel de G .

Le graphe partiel $(X,U-U')$ de $G = (X,U)$ se note $G_{U'}$. Si $U' = \{u\}$, $G_{U'}$ se note G_u .

III.2. Graphes μ -équivalents.

Deux graphes G et G' de $\mathcal{G}(X)$ sont dits μ -équivalents s'ils ont même fermeture transitive. [Roy, 3]

Proposition III.1. Si G est fortement connexe, tout graphe partiel G' de G est μ -équivalent à G si et seulement si G' est fortement connexe.

III.3. Famille supprimable.

Dans un graphe $G = (X,U)$, une famille d'arcs $V \subset U$ (resp. un arc $u \in U$) est dit μ -supprimable (ou plus simplement supprimable) si le graphe partiel G_V (resp. G_u) est μ -équivalent à G .

Proposition III.2. Si G est fortement connexe, V est supprimable si et seulement si G_V est fortement connexe.

Proposition III.3. Dans un graphe G , une famille V d'arcs est supprimable si et seulement si , pour tout arc $u \in V$ il existe dans G un chemin, d'origine l'origine de u et d'extrémité l'extrémité de u , auquel n'appartient aucun arc de V . [Roy, 1]

Remarque : Dans un graphe fortement connexe, toute boucle est supprimable.

III.4. Graphe μ -minimal.

Un graphe est dit μ -minimal s'il n'a pas d'arc supprimable.

Proposition III.4. Un p -graphe μ -minimal est un 1-graphe.
immédiat.

Proposition III.5. Etant donné un graphe G sans circuit, il n'existe qu'un seul graphe μ -minimal G' qui lui soit μ -équivalent et G' est nécessairement un graphe partiel de G . [Roy, 3]

G' est appelé squelette de G .

THEOREME III.1.

Un graphe fortement connexe μ -minimal est sans boucle et a au moins deux anti-noeuds (donc deux transmetteurs) [Berge, 6]

III.5. Graphe α -minimal.

Etant donné un graphe G , un graphe partiel G' de G , μ -équivalent à G est dit α -minimal si et seulement si il a le nombre minimal d'arcs parmi tous les graphes partiels μ -équivalents à G .

Proposition III.6. Si un graphe partiel G' de G est μ -équivalent à G et α -minimal, il est μ -minimal.

(Sinon, il aurait un arc u supprimable et G'_u graphe partiel de G et μ -équivalent à G aurait moins d'arcs que G').

IV. OPERATION Ψ

IV.1. Définition : Etant donné un graphe G , l'opération Ψ permet de déduire de G un graphe sans boucle ni transmetteur.
 Ψ est définie par les transformations itérées suivantes:

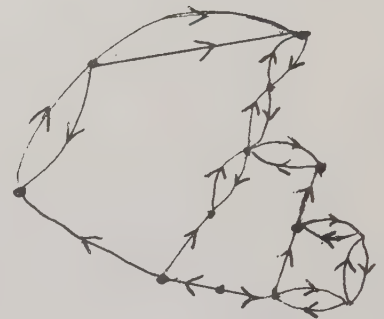
- a) toute boucle est supprimée.
- b) Si x est un transmetteur (y, x, z) , on remplace le chemin $[y, x, z]$ par l'arc (y, z) . Si $y = z$, l'arc (y, z) obtenu étant une boucle sera supprimé.

On poursuit ces transformations jusqu'à ce qu'on obtienne un graphe G' sans boucle ni transmetteur. G' sera noté $\Psi(G)$.

Exemple



G



$G' = \Psi(G)$

Ces transformations ont pour seuls effets de faire disparaître les boucles de G , de remplacer chaque branche ou pseudo-branche de G par un arc, de réduire chaque sous-graphe Q -fortement connexe G_i de G qui n'a pas de sommet sur une pseudo-branche à un sommet de G_i ou de le remplacer par un graphe Q -fortement connexe. Donc, même si ces transformations peuvent se faire dans des ordres différents, elles aboutissent au même résultat :

Proposition IV.1. Pour tout graphe G , $\Psi(G)$ est unique et $\Psi(G)$ est isomorphe à G si et seulement si G est sans boucle ni transmetteur.

IV.2. Propriétés.

Proposition IV.2. Pour tout graphe G , si G_i sont les sous-graphes de G engendrés par ses composantes connexes, $\Psi(G_i)$ sont les sous-graphes de $\Psi(G)$ engendrés par ses composantes connexes.

immédiat.

Proposition IV.3. Soient deux sommets distincts x et y qui sont dans G et dans $G' = \Psi(G)$. Il existe une application bijective de l'ensemble des chemins élémentaires $[x,y]_{G'}$ de G' sur l'ensemble des chemins élémentaires $[x,y]_G$ de G , et tout $[x,y]_{G'}$ passe par les arcs de $[x,y]_G$ qui sont dans G' .

En effet, les seuls chemins élémentaires de G qui subissent une transformation sont des chemins situés sur un sous-graphe Q -fortement connexe de G (et ils existent dans G' si les sommets qui les constituent existent dans G') et les chemins de branches ou de pseudo-branches de G (et ils sont transformés en arcs d'extrémité existant dans G').

Nous pouvons déduire de cette proposition un résultat analogue pour les circuits élémentaires et également :

Proposition IV.4. $\Psi(G)$ est fortement connexe si et seulement si G est fortement connexe.

Etablissons maintenant une relation entre le nombre de circuits élémentaires d'un graphe G et celui de $G' = \Psi(G)$.

Proposition IV.5. Pour tout graphe G , si $G' = \Psi(G)$, alors :
 $\xi(G) - \xi(G') = v(G) - v(G')$.

D'après la proposition IV.2. , on peut supposer que G est connexe.

Dans ce cas $v(G) = m - n + 1$.

a) Soit G_1 le graphe déduit de G en supprimant un circuit élémentaire extrémal c d'un sous-graphe Q -fortement connexe de G . Alors
 $\xi(G_1) = \xi(G) - 1$, $m_1 = m - m_0$, $n_1 = n - n_0 + 1 = n - m_0 + 1$ (m_0 étant le nombre d'arcs de c , n_0 le nombre de sommets de c : $m_0 = n_0$).

Donc $v(G_1) = m_1 - n_1 + 1 = (m - m_0) - (n - m_0 + 1) + 1 = m - n = v(G) - 1$.

b) Soit G_2 le graphe déduit de G en remplaçant une branche de m_0 arcs et n_0 sommets ($m_0 = n_0 - 1$) par un arc. Alors $\xi(G_2) = \xi(G)$,
 $m_2 = m - m_0 + 1$, $n_2 = n - n_0 + 2 = n - m_0 + 1$. Donc $v(G_2) = m_2 - n_2 + 1 = m - m_0 + 1 - (n - m_0 + 1) + 1 = m - n + 1 = v(G)$.

On déduit $G' = \Psi(G)$ de G par une suite de transformations de type a ou b qui chacune donne un graphe connexe. Donc $\xi(G) - \xi(G') = v(G) - v(G')$.

Nous avons :

Proposition IV.6. Si G est un graphe inarticulé, $\Psi(G)$ est un graphe inarticulé.

En effet, tout sommet x de G' existe dans G . Si x était un point d'articulation de G' , il existerait dans G' deux sommets y et z tels que toute chaîne $[y, z]$ passerait par x . Il en serait de même dans G et x serait un point d'articulation de G .

La Réciproque est évidemment fausse.

V. RECOUVREMENT.

V.1. Ensembles, matrices, hypergraphes.

V.1.1. Soit un ensemble fini $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$:

$$\mathcal{E} = (e_j)_{j \in J}, \quad \mathcal{L} = (X_i)_{i \in I}, \quad J = \{1, \dots, \gamma\}, \quad I = \{1, \dots, \lambda\}$$

Une famille $\mathcal{J} = (e_j)_{j \in J_1}$, $J_1 \subset J$, est un système de représentants (S R) de $\mathcal{L}$ si et seulement si :

$$\forall i \in I, \exists j \in J_1, e_j \in X_i$$

Si l'on définit la correspondance Γ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}$:

$$\Gamma(e_j) = \{X_i | e_j \in X_i\}$$

dire que $\mathcal{J}$ est un SR de $\mathcal{L}$ revient à dire que :

$$\bigcup_{j \in J_1} \Gamma(e_j) = \mathcal{L};$$

c'est-à-dire la famille $(\Gamma(e_j))_{j \in J_1}$ est un recouvrement de $\mathcal{L}$.

$\mathcal{J}$ sera dit SR minimal de $\mathcal{L}$ s'il n'existe pas un SR $\mathcal{J}'$

de $\mathcal{L}$ tel que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$. $\mathcal{S}$ sera dit un SR optimal de $\mathcal{L}$ si $|\mathcal{S}|$ est minimal. $\neq$

Un couplage $\mathcal{D}$ de $\mathcal{L}$ est une famille $(X_i)_{i \in I_1}$, $I_1 \subset I$, dont les X_i sont disjoints deux à deux.

S'il n'existe pas un couplage $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{L}$ tel que $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$, $\mathcal{D}$ est dit maximal. Si $|\mathcal{D}|$ est maximal, $\mathcal{D}$ est dit optimal.

V.I.2. Considérons la matrice $A = (a_{ij})$, de λ lignes et γ colonnes dont les coefficients sont 0 ou 1, définie ainsi :

$$a_{ij} = 1 \text{ si et seulement si } e_j \in X_i.$$

Un SR de $\mathcal{L}$ se traduira par : système de colonnes représentant les lignes (CL). La cardinalité d'un CL optimal se notera $\tau(A)$.

Un couplage $\mathcal{D}$ de $\mathcal{L}$ se traduira par : ensemble de lignes disjointes deux à deux (LD). La cardinalité d'un LD optimal se notera $\nu(A)$.

On peut définir un système de lignes représentant les colonnes (LC). La cardinalité d'un LC optimal se notera $\rho(A)$.

On peut définir un ensemble de colonnes disjointes deux à deux (CD). La cardinalité d'un CD optimal se notera $\bar{\alpha}(A)$.

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad \tau({}^t A) &= \rho(A) & , \quad \nu({}^t A) &= \bar{\alpha}(A) \\ \rho({}^t A) &= \tau(A) & , \quad \bar{\alpha}({}^t A) &= \nu(A) \end{aligned}$$

Proposition V.1.

$$\nu(A) \leq \tau(A)$$

$$\rho(A) \geq \bar{\alpha}(A)$$

[Berge, 6]

V.1.3. La donnée de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$ avec: $\forall i \in I, X_i \neq \emptyset$ et $\bigcup_{i \in I} X_i = \mathcal{E}$ définit un hypergraphe $H = (\mathcal{E}; X_1, X_2, \dots, X_\lambda)$ [Berge, 6]
Nous dirons que A est la matrice associée à H . Alors ${}^t A$ est la matrice associée à l'hypergraphe dual $H^* = (X; \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_\gamma)$.

Un CL de A est un ensemble transversal de H (ou un recouvrement de H^*)

Un LC de A est un recouvrement de H (ou un ensemble transversal de H^*).

$\tau(H) = \tau(A)$ est le nombre de transversalité de H .

$\rho(H) = \rho(A)$ est le nombre de recouvrement de H .

Un LD de A est un couplage de H .

Un CD de A est un couplage de H^* .

V.2. Cas particuliers.

V.2.1.

Proposition V.2. Si A est totalelement unimodulaire , alors

$$\nu(A) = \tau(A)$$

$$\bar{\alpha}(A) = \rho(A)$$

On peut démontrer cette proposition en utilisant les méthodes de la programmation linéaire [Berge,6] .

V.2.2. A est la matrice d'incidence sommets-arêtes d'un graphe simple G

Dans ce cas, à un CL , un LC , un CD , un LD de A correspondent respectivement dans G : une couverture , un support , un couplage des arêtes , un ensemble stable , D'après la proposition V.1 , on a :

$$\alpha(G) \leq c(G)$$

$$\sigma(G) \geq \Pi(G)$$

Si G est biparti , A est totalelement unimodulaire. Donc :

$$\alpha(G) = c(G)$$

$$\sigma(G) = \Pi(G)$$

V.2.3. A = M + I , M étant la matrice d'adjacence d'un l-graphe G.

A un CL de A correspond un ensemble d'absorption de G :

$$\beta(G) = \tau(A)$$

V.2.4. A a deux 1 par colonne.

Conjecture V.1. Si A est une matrice dont toute ligne a au moins un 1 et chaque colonne deux 1, si $v(A) \geq \frac{\lambda}{2}$, alors $\tau(A) = v(A)$.

Si on interprète A comme étant la matrice d'incidence sommets-arêtes d'un graphe simple, la conjecture V.1. équivaut à :

Conjecture V.2. Soit un graphe simple $G = (X, E)$, d'ordre n , sans sommet isolé, si $\alpha(G) \geq \frac{n}{2}$, alors $c(G) = \alpha(G)$.

Il suffirait de démontrer :

1) Soit un graphe simple $G = (X, E)$, d'ordre n , sans sommet isolé et S un ensemble stable optimal. Soit $G' = (X, E')$ avec $E' = E - E''$, $E'' = \{\{x, y\} | \{x, y\} \in E ; x, y \in X - S\}$. Si $\alpha(G) \geq \frac{n}{2}$, alors S est un ensemble stable optimal de G' donc $\alpha(G') = \alpha(G)$.

2) Soit le graphe biparti $G' = (X - S, S, E')$. Toute couverture optimale de G' est une couverture optimale de G donc $c(G') = c(G)$.

Conséquence. Supposons que la conjecture V.2. soit vraie.

Soit $\delta_0 = \max_{A \subset X - S} (|A| + |\Gamma A|)$ la déficience de G' noté $(X - S, S, \Gamma)$ [Berge, 1].

On a : $\alpha(G') = |S| + \delta_0$, $|S| = \alpha(G)$, $\alpha(G) = \alpha(G')$ donc $\delta_0 = 0$.

On peut donc coupler $X - S$ dans S , donc $X - S$ sur $S' \subset S$. La réunion des arêtes de ce couplage et d'arêtes en nombre minimal saturant $S - S'$ est une couverture optimale F de G' , donc de G .

Exemple

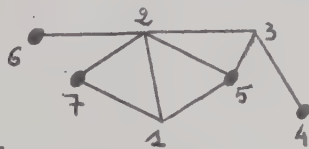


Fig. V.1

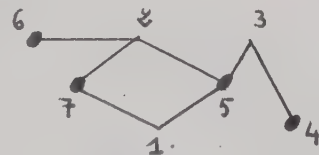


Fig. V.2

Les sommets épaissis constituent un ensemble stable optimal.

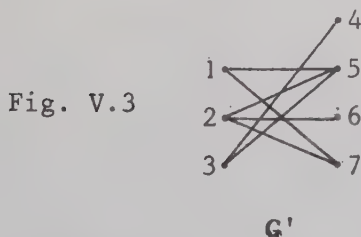


Fig. V.3

couplage $C = \{\{1, 7\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$
 $F = C \cup \{\{2, 6\}\}$

Remarque

Si G est biparti, on a $\alpha(G) \geq \frac{n}{2}$ et $\alpha(G) = c(G)$.

V.3. Classe $\mathcal{Q}(R, S)$.

Soit A une matrice $(0,1)$ de dimension $m \times n$, r_i (resp. s_j) la somme des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne (resp. $j^{\text{ème}}$ colonne) de A . Soit $\mathcal{Q}(R, S)$ la classe de toutes les matrices $(0,1)$ de dimension $m \times n$ qui ont même vecteur $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ et même vecteur $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$. [Ryser, 4]. On suppose $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_m$; $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$.

Soit α un entier tel que $1 \leq \alpha \leq r_m$. Soit B une sous-matrice de A , $m \times \epsilon$, telle que la somme des coefficients de chaque ligne est au moins α (les colonnes de B constituent un CL et chaque ligne est représentée au moins α fois). Le plus petit ϵ qui a cette propriété est appelé α -largeur $\epsilon(\alpha)$ de A . Soit $\tilde{\epsilon}(\alpha)$ la α -largeur minimale, $\bar{\epsilon}(\alpha)$ la α -largeur maximale des matrices de $\mathcal{Q}$. La matrice $\tilde{A}$ de $\mathcal{Q}(R, S)$ construite comme il est indiqué ci-dessous a pour α -largeur : $\tilde{\epsilon}(\alpha)$, $\forall \alpha \in \{1, \dots, r_m\}$, et le α -ième 1 de la dernière ligne de $\tilde{A}$ prend place dans la colonne $\tilde{\epsilon}(\alpha)$.

Si $\alpha=1$, $\epsilon(1) = \tau(A)$ (cardinal d'un CL optimal). La construction de $\tilde{A}$ permet d'obtenir un minorant de $\epsilon(1)$: le numéro de la colonne où se trouve le premier 1 de la dernière ligne de $\tilde{A}$.

Construction de $\tilde{A}$.

Soit $\bar{A}$ de $\mathcal{Q}(R, \bar{S})$ telle que $\bar{A}_i$, $1 \leq i \leq m$, est une matrice ligne de n composantes dont les r_i premières sont égales à 1 et les autres à 0.

On commence la construction de $\tilde{A}$ à partir de $\bar{A}$, en déplaçant le dernier 1 de certaines lignes de $\bar{A}$ le long de ces lignes pour les placer dans la colonne n . La somme des éléments de la colonne n devra être s_n et les 1 devront figurer dans les lignes où les sommes des coefficients sont les plus grandes. Au cas où certaines sommes d'éléments de lignes seraient égales, on donnerait la préférence à celles parmi ces lignes qui sont situées le plus bas. On obtient une matrice $(\bar{A}_{n-1}, A_1)$. On répète le processus sur $\bar{A}_{n-1}$, etc ...

Exemple

A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	R
1	1	1	1	1						1	6
1				1	1				1		4
1	1							1			3
		1	1				1				3
	1	1				1					3

$S = (3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

$\overline{A}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	R
1	1	1	1	1	1						6
1	1	1	1								4
1	1	1									3
1	1	1									3
1	1	1									3

$\overline{S} = (5, 5, 5, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$

$\tilde{A}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	R
1	1		1				1		1	1	6
1		1		1				1			4
1		1		1							3
	1	1			1						3
	1		1			1					3

$\tau(A) \geq 2$

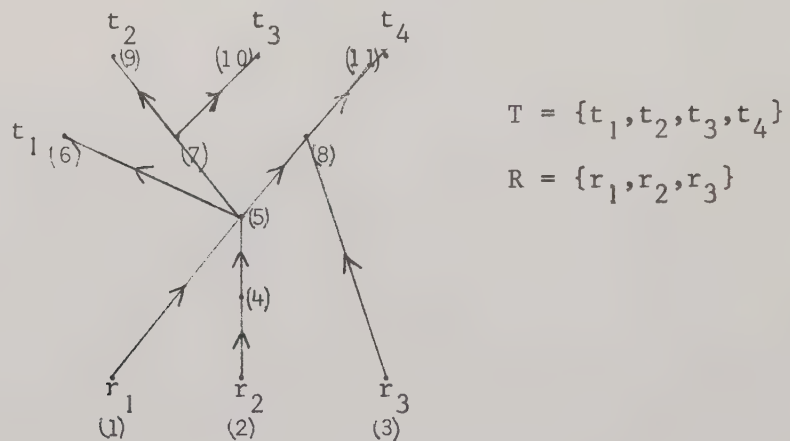
$S = (3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

VI. ARBRE ET ARBORESCENCE.

Un arbre H étant un 1-graphe sans circuit, il a une base T et une anti-base R uniques et à chaque sommet de H on peut faire correspondre son rang.

Nous représentons un arbre en disposant les sommets de même rang sur une même ligne.

Exemple :



Ses sommets sont numérotés suivant une numérotation ordonnée.

Nous appellerons veine tout chemin ayant son extrémité initiale dans R et son extrémité terminale dans T .

Proposition VI.1.

a) Pour tout $r \in R$, il existe $t \in T$ tel que il existe une veine $[r, t]$ et $[r, t]$ est unique. Nous noterons

$$\Gamma(r) = \{t / \text{il existe } [r, t]\}$$

Pour tout $t \in T$, il existe $r \in R$ tel que il existe une veine $[r, t]$ et $[r, t]$ est unique. Nous noterons

$$\Gamma'(t) = \{r / \text{il existe } [r, t]\}$$

c) Tout chemin de H est dans une veine de H .

a) Soit $r \in R$. Alors ou bien H n'a qu'un sommet : r , et c'est terminé, ou bien $r \notin T$ (puisque H est connexe). Dans ce dernier cas r a au moins un descendant dans T , soit t . Le chemin $[r,t]$ est unique puisque H n'a pas de cycle.

Même démonstration pour la deuxième partie.

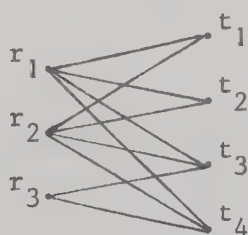
b) Tout chemin $[x,y]$ de H est dans une veine.

Si $x \in T$, $[x,y]$ est réduit à $\{x\}$. Si $x \notin T$, x est dans R ou a un ascendant dans R , soit r . Si $y \in T$, $[x,y] \subset [r,y]$, puisqu'il n'y a qu'un seul chemin $[r,y]$ composé de $[r,x]$ et $[x,y]$. Si $y \notin T$, soit t un descendant de y dans T . $[x,y] \subset [r,t]$, puisqu'il n'y a qu'un seul chemin $[r,t]$ composé de $[r,x]$, $[x,y]$, $[y,t]$.

Représentation des veines.

Soit G le graphe biparti (R,T,Γ) . C'est aussi le graphe biparti (T,R,Γ') . G existe d'après a et parce que : quel que soit $r \in R$, r n'a pas de descendant ni d'ascendant dans R (R est une anti-base) ; quel que soit $t \in T$, t n'a pas d'ascendant ni de descendant dans T (T est une base).

Exemple : (reprenons le précédent)



G

Recouvrement de X et de U par des chemins de $H = (X,U)$.

Un graphe $G = (X,U)$ étant donné, un chemin élémentaire qui n'est pas un circuit est considéré suivant les cas, soit comme un sous-ensemble totalement ordonné de X , soit comme un sous-ensemble totalement ordonné de U . Plus précisément ici, H étant sans circuit, tout chemin de H est un sous-ensemble de X (ou de U) muni d'un

ordre total induit par l'ordre partiel défini sur X (ou sur U) par le rang des sommets.

Soit $s(H)$ (resp. $t(H)$) le nombre minimal de chemins de H recouvrant X (resp. U). Puisque tout chemin de H est dans une veine de H , un ensemble de chemins en nombre minimal recouvrant X (resp. U) est donné par un ensemble de veines en nombre minimal recouvrant X (resp. U). En appelant $u(H)$ le nombre de veines de H (c'est le nombre d'arêtes du graphe biparti $G = (R, T, I)$), on a :

$$\max\{|R|, |T|\} \leq s(H) \leq t(H) \leq u(H) \leq |R| |T|$$

Exemple :



$$\max\{|R|, |T|\} = 5$$

$$s(H) = 6$$

$$t(H) = 5$$

$$u(H) = 9$$

$$|R| |T| = 25$$

Arborescence.

Une arborescence A est un arbre tel que $|R| = 1$.

Soit r l'élément de R . r est une racine : pour tout sommet $x \neq r$, il existe un chemin et un seul $[r, x]$.

Une arborescence A a $|T|$ veines. Le nombre $|T|$ sera appelé : degré de divergence de l'arborescence. C'est le nombre minimal de chemins recouvrant les arcs ou les sommets de l'arborescence.

CHAPITRE 2

GRAPHES FORTEMENT CONNEXES C-MINIMAUX ET

GRAPHES SANS CIRCUIT CO-MINIMAUX

I. GRAPHES FORTEMENT CONNEXES C-MINIMAUX.

Dans cette section, nous disons graphes pour p-graphes sauf précision contraire. Nous pouvons les considérer sans boucle sans perte de généralité comme nous le verrons par la suite.

I.1. Définition

Soit $\mathcal{G}(n,m)$ la famille des graphes fortement connexes de n sommets et m arcs ($n \geq 2$). Tout graphe G de $\mathcal{G}(n,m)$ a au moins $v(G) = k = m - n + 1$ circuits élémentaires (1. P II.2). Soit $\mathcal{G}_0(n,m)$ l'ensemble des graphes de $\mathcal{G}(n,m)$ qui ont k circuits élémentaires et k seulement. Nous montrerons plus loin que $\mathcal{G}_0(n,m)$ n'est pas vide.

Les graphes de $\mathcal{G}_0(n,m)$ sont les graphes de $\mathcal{G}(n,m)$ qui ont le minimum de circuits élémentaires, ce minimum étant k . Nous donnerons donc à tout graphe de $\mathcal{G}_0(n,m)$ le nom de graphe fortement connexe c-minimal, en abrégé : graphe fccm.

Définition I.1. Un graphe fortement connexe c-minimal est un graphe fortement connexe de n sommets et m arcs dont le nombre total de circuits élémentaires est égal à $k = m - n + 1$.

L'adjectif c-minimal étant ainsi justifié, nous pouvons dire qu'un graphe fortement connexe est fccm si et seulement si $\xi(G) = v(G)$.

I.2. Caractérisation.

Nous allons montrer que la c -minimalité d'un graphe fortement connexe G est caractérisée par l'existence dans G d'un arbre de circulation.

Les propositions I.1. et I.2. nous seront utiles pour l'obtention de graphes f_{ccm} .

Proposition I.1. *Tout graphe G , connexe, tel que par chaque arc passe un cycle élémentaire au moins et qui a un arbre de circulation H est fortement connexe.*

Puisque G est connexe il suffit de montrer que par tout arc de G passe un circuit (Ch. I, P II) . Ceci est vrai puisque étant donnée une matrice cyclomatique fondamentale C_H d'une part elle n'a pas de vecteur-colonne nul (Ch. I, P III) , d'autre part ses lignes sont des circuits élémentaires de G .

Proposition I.2. *Tout graphe G de $\mathcal{G}(n,m)$ qui a un arbre de circulation H appartient à $\mathcal{G}_0(n,m)$.*

Les k circuits élémentaires associés à H constituent une base $\mathcal{B}$ du module des flots. Soit $\mathcal{C}_H$ une matrice de circulation fondamentale associée à H : ses vecteurs lignes sont les éléments de $\mathcal{B}$. D'après la proposition II.4 (Ch. I), tout circuit élémentaire de G autre que ceux de $\mathcal{B}$ ne peut être que la somme arithmétique de plusieurs circuits élémentaires de $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble quelconque de plusieurs circuits élémentaires de $\mathcal{B}$.

a) Si les circuits de $\mathcal{E}$ ne sont pas tous disjoints 2 à 2, la somme de tous les circuits de $\mathcal{E}$ aura certaines coordonnées plus grandes ou égales à 2 (car $\overline{\mathcal{C}_H}$ n'a que des 0 et des 1) et au moins $|\mathcal{E}|$ coordonnées égales à 1 provenant de la matrice I_k . Cette somme ne peut donc donner de circuit élémentaire.

b) Si les circuits de $\mathcal{E}$ sont tous disjoints 2 à 2, la somme de tous les circuits de $\mathcal{E}$ ne donne pas non plus de circuit élémentaire.

Les seuls circuits élémentaires de G sont donc ceux de $\mathcal{B}$. Par suite, G a k circuits élémentaires et k seulement : G appartient à $\mathcal{G}_0(n, m)$.

Remarque I.1. Par tout arc du coarbre $\bar{H}$ associé à H dans G , passe un circuit élémentaire et un seul de $\mathcal{B}$, donc un circuit élémentaire et un seul de G . Cette propriété sera exploitée plus loin.

THEOREME I.1.

Un graphe fortement connexe est fccm si et seulement si il possède un arbre de circulation.

Il reste à montrer qu'un graphe G de $\mathcal{G}_0(n, m)$ possède un arbre de circulation au moins.

Le module Φ des flots de G admet une base $\mathcal{B}$ de k circuits élémentaires et G ne possède pas d'autre circuit élémentaire que ceux de $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{C}$ une matrice cyclomatique correspondant à $\mathcal{B}$. Montrons que $\mathcal{C}$ est une matrice échelon.

Supposons que v , vecteur unité dont la $j^{\text{ième}}$ coordonnée est égale à 1, ne figure pas dans les colonnes de $\mathcal{C}$. Par tout arc du circuit c^j passe au moins un circuit élémentaire distinct de c^j , sinon v serait dans $\mathcal{C}$. A tout arc α_i de c^j , faisons correspondre c^i : un parmi les circuits élémentaires distincts de c^j qui passent par α_i (Plusieurs circuits c^i peuvent être confondus pour des i différents). Soit $S = s(c^j) = \{i | c^j_i \neq 0\}$. Montrons que $\varphi = \sum_{i \in S} c^i - c^j$ est un flot positif non nul.

φ est une combinaison linéaire de cycles, donc un flot. De plus : $c^j_i = 1$, $c^i_i = 1$, ($i \in S$). Donc :

$$\sum_{i \in S} c^i_k - c^j_k \geq 0 \quad (k \in S)$$

et les coordonnées de φ ne peuvent être toutes nulles, car pour tout c^i , il existe r tel que $c^i_r = 1$ sinon $s(c^i) \subsetneq s(c^j)$

(c'est-dire l'ensemble des arcs de c^i serait strictement contenu

dans l'ensemble des arcs de c^j , ce qui ne peut être).

$\varphi = \sum_{i \in S} c^i - c^j$ étant un flot positif non nul, est une combinaison linéaire positive de circuits élémentaires $c^t (t \in T)$ (d'après P II.5, ch.1). Donc

$$\sum_{i \in S} c^i - c^j = \sum_{t \in T} \lambda_t c^t \quad (\lambda_t > 0)$$

Les circuits élémentaires c^j , $c^i (i \in S)$, $c^t (t \in T)$ ne sont donc pas indépendants, ce qui contredit le fait qu'ils appartiennent tous à $\mathcal{B}$ d'après l'hypothèse. Donc $\mathcal{C}$ est une matrice échelon.

D'après la proposition II.3 (ch.1), G possède un arbre maximal au moins à partir duquel $\mathcal{B}$ peut être obtenue et puisque $\mathcal{B}$ est formée de circuits, cet arbre est un arbre de circulation.

En résumé et compte tenu de ce qui précède :

Proposition I.3. Un graphe G de $\mathcal{G}(n,m)$ appartient à $\mathcal{G}_0(n,m)$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite (elles le sont alors toutes) :

- a) le nombre total de circuits élémentaires de G est $k=m-n+1$
- b) tous les circuits élémentaires de G sont indépendants.
- c) G possède un arbre de circulation.
- d) il existe dans G un ensemble de k arcs distincts α_i tels que par chacun d'eux passe un circuit élémentaire et un seul $c(\alpha_i)$, les k circuits $c(\alpha_i)$ étant distincts.

Précisons comment on obtient la condition d :

Si G appartient à $\mathcal{G}_0(n,m)$, cet ensemble de k arcs est constitué par l'ensemble des arcs du coarbre $\bar{H}$ associé à un arbre de circulation H de G .

Si la condition d est réalisée, les k circuits $c(\alpha_i)$ constituent une base $\mathcal{B}$ et la matrice de circulation associée est une matrice échelon. Donc G appartient à $\mathcal{G}_0(n,m)$.

Nous verrons plus loin une autre caractérisation des graphes fccm utilisant une propriété de cheminement.

I.3. Propriétés.

1.3.1. Propriétés d'un graphe fccm.

Un graphe fortement connexe c-minimal G étant donné, on sait qu'il possède un arbre de circulation H au moins. Considérons un tel arbre H et la matrice de circulation fondamentale $\mathcal{C}_H$ associée à cet arbre.

Tous les circuits élémentaires de G sont représentés par les vecteurs-lignes de $\mathcal{C}_H$. Les vecteurs-colonnes correspondant aux arcs du coarbre $\bar{H}$ sont k vecteurs unités distincts. (fig.I.1)

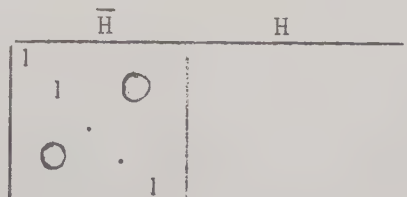


Fig. I.1

Nous avons donc les propriétés suivantes :

Proposition I.4. Par tout arc du coarbre $\bar{H}$, passe un circuit élémentaire et un seul de G .

Proposition I.5. Tout circuit élémentaire de G contient un arc et un seul de $\bar{H}$.

Nous déduisons de la proposition I.5 :

Proposition I.6. Tout circuit élémentaire de G est formé d'un chemin de H et d'un arc de $\bar{H}$.

Ces propriétés sont vraies quel que soit l'arbre de circulation H de G . Supposons que G possède un circuit c de longueur p et considérons un arbre de circulation H quelconque de G . Il résulte de la proposition I.5 que H a $p-1$ arcs dans c . En

particulier si c est un circuit hamiltonien, $p=n$ et on a :

Proposition I.7. Si G possède un circuit hamiltonien c , tout arbre de circulation H de G a tous ses $n-1$ arcs dans c et est donc un chemin hamiltonien.

Supposons que G ait deux circuits hamiltoniens c^1 et c^2 . D'après la proposition précédente, tout arbre de circulation H de G a tous ses $n-1$ arcs dans c^1 et tous ses $n-1$ arcs dans c^2 , donc c^1 et c^2 ont en commun $n-1$ arcs. Si G est 1-graphe c^1 et c^2 sont confondus, d'où :

Proposition I.8. Tout 1-graphe fortement connexe c -minimal ne peut avoir qu'un seul circuit hamiltonien.

1.3.2. Adjonction d'arcs.

Montrons maintenant comment la forte connexité c -minimale d'un graphe peut être conservée par l'adjonction de certains arcs.

Proposition I.9. Etant donné un graphe G fortement connexe c -minimal, et H un de ses arbres de circulation, le graphe G' obtenu en ajoutant un arc (a,b) si tous les arcs (a,b) appartiennent à $\overline{H}$, ou en ajoutant un arc (b,a) si l'un des arcs (a,b) appartient à H , est fortement connexe c -minimal et H est un arbre de circulation de G' .

Si tous les arcs (a,b) appartiennent à $\overline{H}$, par chacun de ces arcs passe un circuit élémentaire et un seul de G , donc il n'y a qu'un chemin élémentaire $[b,a]$ dans G . En ajoutant un arc (a,b) , on introduit un seul circuit supplémentaire formé par cet arc et le chemin $[b,a]$. Le graphe G' est fortement connexe. Il a $m' = m+1$ arcs. Le nombre de ses circuits est $\xi(G') = \xi(G)+1 = m-n+1+1 = m'-n+1$ donc G' est fortement connexe c -minimal. H est arbre de circulation de G' puisque $[b,a]$ était dans H et que le nouvel arc (a,b) forme un circuit avec $[b,a]$.

Si l'un des arcs (a,b) appartient à H , c'est le seul arc (a,b)

existant et tous les arcs (b,a) appartiennent à $\bar{H}$. Il n'y a donc pas de chemin élémentaire $[a,b]$ autre que celui formé de l'arc (a,b) . En ajoutant un arc (b,a) on introduit un seul circuit élémentaire formé par cet arc et l'arc (a,b) . G' est donc fortement connexe c-minimal et H est un arbre de circulation de G' .

Cette proposition montre comment on peut passer d'un 1-graphe fortement connexe c-minimal à un p-graphe fortement connexe c-minimal par adjonction d'arcs et inversement, par suppression d'arcs.

Remarque I.2. : En ajoutant des boucles à un graphe G fccm, on obtient un graphe G' fccm et G et G' ont les mêmes arbres de circulation. Ce qui montre que l'hypothèse "sans boucle" ne fait pas perdre de généralité à l'étude des graphes fccm.

I.3.3. Matrice cocyclomatique.

Voici maintenant une proposition qui nous sera utile dans les relations entre les graphes fortement connexes c-minimaux et les graphes sans circuit co-minimaux.

Soit un graphe G de $\mathcal{G}_0(n,m)$ et H un arbre de circulation de G .

Proposition I.10. La matrice cocyclomatique fondamentale $D_{\bar{H}} = (\bar{D}, I_{\bar{H}})$ est telle que $\bar{D}_{\bar{H}}$ n'a que des coefficients égaux à 0 ou -1 .

$$\text{Soit } \mathcal{C}_H = (I_k, \bar{\mathcal{C}}_H) = (c_i^j) \quad , \quad D_{\bar{H}} = (d_i^j).$$

Tout vecteur ligne de $\mathcal{C}_H$ est orthogonal à tout vecteur-ligne de $D_{\bar{H}}$ (Proposition II.8, chap.1) :

$$\sum_{i=1}^m c_i^j d_i^s = 0 \quad , \quad 1 \leq j \leq k \quad , \quad 1 \leq s \leq l$$

$$\text{Donc : } \sum_{i=1}^k c_i^j d_i^s + \sum_{i=k+1}^m c_i^j d_i^s = 0 \quad , \quad 1 \leq j \leq k \quad , \quad 1 \leq s \leq l$$

$$\text{Mais : } c_i^j = \delta_i^j \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad , \quad 1 \leq j \leq k$$

et
$$d_i^s = \delta_i^s, \quad k+1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq s \leq l$$

Donc :
$$d_j^s + c_{s+k}^j = 0, \quad 1 \leq j \leq k, \quad 1 \leq s \leq l$$

Puisque $\bar{\varphi}_H$ n'a que des coefficients égaux à 0 ou 1, $\bar{D}_H$ n'a que des coefficients égaux à 0 ou -1.

I.3.4. Opération Ψ

Proposition I.11. $G' = \Psi(G)$ est un graphe fccm si et seulement si G est un graphe fccm.

Ceci se déduit immédiatement des propositions IV.4 et IV.5 (ch.1): G' est fortement connexe si et seulement si G est fortement connexe et :

$$\xi(G) - \xi(G') = v(G) - v(G')$$

I.3.5. Blocs.

Proposition I.12. Un graphe connexe G est fccm si et seulement si ses blocs sont fccm.

On peut la démontrer à l'aide de la notion d'arbre de circulation mais on la démontrera plus loin en utilisant une caractérisation de la c-minimalité par une propriété de cheminement.

I.3.6.

Proposition I.13. Soit G un graphe de $\mathcal{G}_0(n, m)$, H un arbre de circulation de G . On a :

$$\max \{a(H), b(H)\} \leq m - n + 1$$

On obtient G en complétant H par les arcs de $\bar{H}$. Le nombre d'arcs de $\bar{H}$ est donc au moins égal au nombre minimal d'arcs qu'il faut ajouter à H pour le rendre fortement connexe. Ce dernier nombre est $\{\max a(H), b(H)\}$ (ch.1, PI.9).

I.3.7. Représentation d'un graphe fccm.

Etant donné un graphe G fccm et H un arbre de circulation de G , on peut représenter H comme il est indiqué chapitre I, partie VI, et numéroté ses sommets suivant une numérotation ordonnée. Les arcs (i,j) de H sont alors orientés de bas en haut et $i < j$, ceux (i,j) de $\bar{H}$ sont orientés de haut en bas et $i > j$.

I.3.8. Arborescence de circulation.

Remarque I.3. Un graphe fccm peut posséder plusieurs arbres de circulation. On peut se demander si, pour tout graphe fccm, l'un au moins de ses arbres de circulation est une arborescence. Il n'en est rien comme le montre le contre-exemple suivant : graphe fccm ne possédant pas d'arborescence de circulation.



Fig.I.2

L'inverse de ce graphe possède une arborescence de circulation mais on peut trouver un graphe fccm tel que ni lui, ni son inverse n'ont une arborescence de circulation.

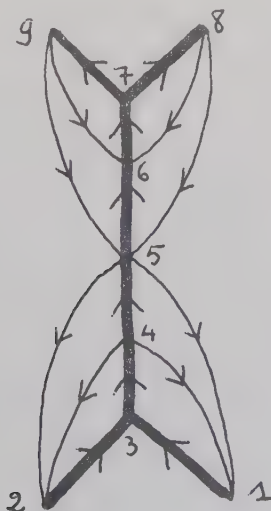


Fig. I.3

Notons que ceci n'est pas dû au fait que le graphe ci-dessus est articulé : en lui ajoutant, par exemple, l'arc (8.1), on obtient un graphe fccm, inarticulé, sans arborescence de circulation (pour une démonstration rapide, voir IV.2.3. application 2).

I.4. Obtention.

Il y a plusieurs manières d'obtenir un graphe fortement connexe c -minimal qui dépendent des conditions imposées sur ce graphe.

Si aucune condition n'est imposée, il suffit de prendre un arbre quelconque H et de le compléter par des arcs de telle sorte que le graphe obtenu soit fortement connexe et possède H comme arbre de circulation (Proposition I.2). Le procédé le plus simple consiste à compléter chaque arc (a,b) de H par un arc (b,a) . Mais si l'on veut, par exemple, obtenir un l -graphe antisymétrique, l'arbre H que l'on prend au départ ne doit plus être quelconque. Nous examinerons, dans le cas où le graphe fccm construit à partir d'un arbre H doit vérifier certaines conditions, quelles sont les contraintes qui se présentent quant au choix de cet arbre. (I.4.1.)

Mais on peut avoir une condition beaucoup plus restrictive : chercher un graphe de $\mathcal{G}_0(n,m)$, les relations d'adjacence entre les sommets (sans orientation des arcs) étant imposées. Il s'agit alors d'orienter un multigraphe (ou un graphe simple) ou de réorienter un p -graphe. (I.4.2.)

I.4.1. Obtention d'un graphe fccm G à partir d'un arbre H .

a) Si G doit être un l -graphe, tout arbre H convient. Le nombre m d'arcs de G sera inférieur ou égal au nombre maximal de chemins élémentaires distincts de H .

b) Si G doit être un l -graphe antisymétrique, tout arc de H doit appartenir à un chemin élémentaire de H de longueur 2.

c) Si G doit avoir n sommets, H doit avoir n sommets.

d) Si G doit avoir m arcs, on peut prendre pour H un

chemin de $n=m$ sommets : G possède alors un circuit hamiltonien et n'a pas d'autre arc.

D'une manière générale, il faut prendre un arbre H de n sommets ($n \leq m$) et tel que :

$$\max\{|R|, |T|\} \leq m-n+1 \quad (\text{Proposition I.13})$$

e) Si G doit avoir k circuits élémentaires, on peut se donner n ou m suivant les contraintes exigées.

On peut évidemment grouper plusieurs des conditions ci-dessus.

I.4.2. Obtention d'un graphe fccm à partir d'un graphe donné.

Soit un p -graphe G_1 , connexe, de n sommets et m arcs, tel que par chaque arc passe un cycle élémentaire au moins. En inversant certains arcs de G_1 , on peut faire apparaître un arbre de circulation (1, th.I.1.). Le graphe G ainsi obtenu est connexe, a n sommets et m arcs, est tel que par chaque arc passe un cycle élémentaire au moins et possède un arbre de circulation. Il appartient donc à $\mathcal{G}_0(n,m)$ (proposition I.1. et I.2.). Pour faire apparaître cet arbre, nous pouvons utiliser la méthode matricielle due à Camion, que nous précisons ci-dessous sur un exemple, qui consiste à réorienter un p -graphe (si c'est un multigraphe ou un graphe simple qui est donné, on peut d'abord l'orienter arbitrairement). [Camion, 6]

Nous pouvons utiliser aussi l'algorithme de Crestin qui permet d'orienter un graphe simple ou un multigraphe (ou de modifier l'orientation d'un p -graphe) de manière à obtenir un graphe $\mathcal{G}_0(n,m)$ possédant une arborescence de circulation. [Crestin, 1]

I.4.2.1. Méthode matricielle.

Soit le graphe $G_1 = (X, U)$ représenté Fig.I.4. Soit $H_0 = (X, U_0)$ un arbre maximal de G_1 , par exemple : $U_0 = \{4, 5, 6\}$. Soit $A = C_{H_0}$ une matrice cyclomatique associée à H_0 :

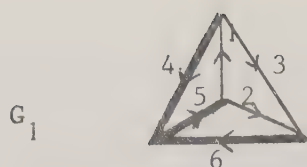


Fig. I.4

	1	2	3	4	5	6
1	1			1	1	
2		1			1	1
3			1	-1		1

$$A = C_{H_0}$$

Soit $\mathcal{M}$ la classe des inverses des matrices carrées inversibles d'ordre k extraites de la matrice $[A, -A]$ et ayant pour première colonne le premier vecteur unité. Soit $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, la classe des matrices telles que dans chaque ligne le coefficient non nul de plus grand indice est positif. Soit T la plus grande des matrices de $\mathcal{M}'$. (l'ordre sur les matrices est défini ainsi : une matrice est positive si le coefficient de plus grand indice est positif, l'ordre sur les indices étant : $(i, j) > (i', j') \Leftrightarrow i < i'$ ou $(i = i' \text{ et } j < j')$).

Dans l'exemple ci-dessus , on trouve :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Le théorème appliqué ici dit : tous les coefficients de toute colonne de TA ont même signe.

$$TA = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & & 1 & & 1 & 1 \\ & 1 & & & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 & & 1 \end{array} \end{array}$$

En changeant le signe des coefficients de la colonne 4 , on obtient une matrice échelon, matrice de circulation fondamentale $\mathcal{C}_H$ associée à l'arbre de circulation H d'arcs 3,5,6 du graphe G obtenu en inversant l'arc 4 de G_1 .

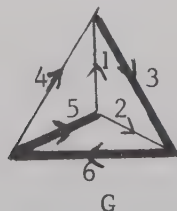


Fig. I.5

	1	2	4	3	5	6
1	1			1	1	1
2		1			1	1
4			1	1		1

$\mathcal{C}_H$

Remarque : T est l'inverse d'une matrice M de $[A, -A]$.

Ici :

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & & & -1 \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

C'est cette matrice qui nous désigne les arcs 1, 2, 4 du coarbre associé à l'arbre H de circulation que l'on veut créer. En effet, si M' est la matrice extraite de A ayant les mêmes numéros de colonnes que M on a :

$TM = I$ donc $TM' = I'$ (matrice ayant des coefficients égaux à 1 ou -1 sur la diagonale principale et des 0 ailleurs).

I.4.2.2. Algorithme de Crestin.

Soit un multigraphe G_0 , connexe, tel que par toute arête passe un cycle élémentaire au moins.

L'algorithme donné par Crestin s'applique aux graphes simples. Nous allons voir qu'il peut s'appliquer aux multigraphes. Dans ce cas, la description de l'algorithme peut être la suivante :

Notons $G_0 = (X, U_0)$ le multigraphe donné, $A = (X, U_A)$ l'arborescence cherchée, $G = (X, U)$ le p-graphe muni de l'orientation cherchée (donc fortement connexe c-minimal).

Nous construisons récursivement au moyen des règles ci-dessous, une suite : $s_0, s_1, \dots, s_n$, de sommets de G et nous définissons les arcs de A puis ceux de G, à partir de cette suite.

Règles - On prend s_0 quelconque. Soient $s_0, s_1, \dots, s_i$ connus; on détermine s_{i+1} en appliquant une des deux premières règles :

1) S'il existe au moins un sommet s tel qu'il existe au moins une arête $\{s_i, s\}_r \in U_0$ avec $s \notin \{s_i, s_{i-1}, s_{i-2}, \dots, s_0\}$, on choisit un sommet s et on pose $s_{i+1} = s$, on choisit une arête

$\{s_i, s\}_r$, soit $\{s_i, s\}_{i_k}$, et on pose $(s_i, s_{i+1})_{i_k} \in U_A$.

2) Sinon, on décrit la suite $s_i, s_{i-1}, s_{i-2}, \dots$ dans cet ordre jusqu'à trouver un sommet s_j et un sommet s tels qu'il existe au moins une arête $\{s_j, s\}_r \in U_O$ avec $s \notin \{s_i, s_{i-1}, \dots, s_0\}$. On pose $s_{i+1} = s$. On choisit une arête $\{s_j, s\}_r$, soit $\{s_j, s\}_{j_k}$, et on pose $(s_j, s_{i+1})_{j_k} \in U_A$.

3) On s'arrête lorsque aucune des règles 1) ou 2) n'est applicable.

4) On oriente alors les arêtes de G_O ainsi :

$$(s_i, s_j)_r \in U_A \Rightarrow (s_i, s_j)_r \in U,$$

$$\{s_i, s_j\}_r \in U_O - U'_A, \quad j < i \Rightarrow (s_i, s_j)_r \in U,$$

(X, U'_A) étant le graphe simple induit par A .

La démonstration de la validité de l'algorithme donnée par Crestin pour les graphes simples est valable pour les multigraphes. Nous pouvons le voir directement sur cette démonstration ou le constater de la manière suivante : il résulte de l'algorithme décrit ci-dessus que parmi toutes les arêtes joignant deux sommets de G_O , ou bien l'une donne un arc de U_A , toutes les autres des arcs de $U - U_A$, ou bien toutes donnent des arcs de $U - U_A$.

On obtiendrait donc le même résultat en supprimant dans le multigraphe G_O , pour chaque paire de sommets $\{a, b\}$ liés par plusieurs arêtes, toutes les arêtes sauf une : u'_O , ce qui donnerait un graphe simple G'_O ; en appliquant l'algorithme de Crestin à G'_O ; en complétant G'_O par les arêtes supprimées mais orientées de la manière suivante : sens contraire de u'_O si u'_O a donné un arc de l'arborescence A , même sens que u'_O si u'_O a donné un arc de la coarborescence associée à A . Le graphe obtenu G aurait bien A comme arbre de circulation (proposition I.9).

Remarque I.4. Recherche d'une arborescence de circulation de degré de divergence minimal.

Supposons que G_O soit un graphe simple. Appliquons l'algorithme mais en orientant à chaque étape le plus d'arêtes possibles

conformément à la règle 4. Soit G_i le graphe obtenu, avant le choix du sommet s_i , en supprimant toutes les arêtes déjà orientées. Choisissons le sommet s_i suivant les règles 1 ou 2 mais en ajoutant le critère de plus faible degré dans G_i . Soit S_i l'ensemble des sommets de G_i satisfaisant à la règle 1, sinon à la règle 2, et dont les degrés d_i sont égaux et strictement inférieurs aux degrés des autres sommets satisfaisant à la même règle. Si $|S_i| > 1$, nous choisissons un sommet quelconque de S_i et poursuivons la procédure. Lorsqu'elle s'arrête, si nous n'avons pas obtenu une des arborescences maximales A_m de G_o , de degré de divergence minimal (c'est-à-dire une arborescence maximale ayant le minimum de veines : chapitre 1, VI), on effectue un autre choix dans S_p , p maximal. Si aucun choix dans S_p ne conduit à l'obtention d'une arborescence A_m , on effectue un autre choix dans S_q , $q < p$, q maximal, etc ... D'après les recherches effectuées dans [Chaty, 1], il semble que cette procédure conduise à trouver une arborescence A_m , donc un chemin hamiltonien s'il existe.

I.5. Nouvelle caractérisation.

Définition I.2. Un graphe G possède la propriété (P) si et seulement si il est fortement connexe et tel que, pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets de G appartenant à un même circuit élémentaire de G , il existe dans G un chemin élémentaire unique $[x, y]$ ou un chemin élémentaire unique $[y, x]$.

THEOREME I.2.

Un graphe G est fccm si et seulement si il possède la propriété (P).

Démonstration - 1°) Supposons que G soit fccm. Soit H un arbre de circulation de G . Considérons deux sommets x et y de G appartenant à un même circuit élémentaire c . Appelons $[x, y]_1$ et $[y, x]_1$ les chemins élémentaires constituant ce circuit. Supposons qu'il existe un deuxième chemin élémentaire $[y, x]$, soit $[y, x]_2$, distinct de $[y, x]_1$. Soit $t_1 = y$, $t_2, \dots, t_p$ la suite des sommets

communs à $[y, x]_2$ et à c , et telle que l'un au moins des chemins élémentaires $[t_{i-1}, t_i]$ ou $[t_i, t_{i+1}]$ contenus dans $[y, x]_2$ ne soit pas dans c . ($i < j$ si et seulement si t_j est un descendant de t_i dans le sous-graphe de G constitué par $[y, x]_2$). Puisque $[y, x]_2$ est élémentaire et distinct de $[y, x]_1$, il existe sur $[y, x]_1$ un sommet t_q distinct de y et tel que le chemin élémentaire $[t_{q-1}, t_q]$ contenu dans $[y, x]_2$ n'est pas dans c (t_q peut être x).

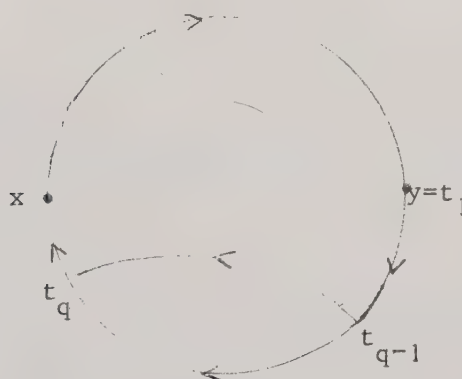


Fig. I.6

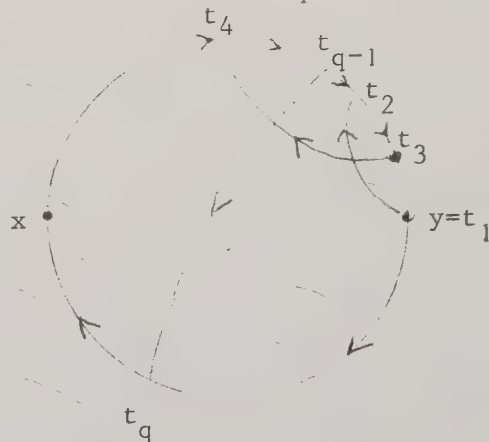


Fig. I.7

Ce chemin $[t_{q-1}, t_q]$ détermine avec c un circuit élémentaire et l'arc unique du coarbre $\bar{H}$, correspondant à ce circuit (proposition I.5.) est nécessairement sur ce chemin $[t_{q-1}, t_q]$ (proposition I.4.). Si t_{q-1} est sur $[y, x]_1$, l'arc du coarbre $\bar{H}$, correspondant à c , est nécessairement sur le chemin élémentaire $[t_{q-1}, t_q]$ contenu dans $[y, x]_1$ (fig. I.6). Si t_{q-1} n'est pas sur $[y, x]_1$, $t_{q-1} \neq y$; pour chaque t_i ($1 < i < q-1$), l'un des chemins élémentaires $[t_{i-1}, t_i]$ ou $[t_i, t_{i+1}]$ contenus dans $[y, x]_2$ contient un arc du coarbre $\bar{H}$ et il existe nécessairement un sommet t_r ($1 < r \leq q-1$) sur le chemin $[t_q, t_{q-1}]$ contenu dans c , donc l'arc du coarbre $\bar{H}$, correspondant à c , ne peut être dans $[t_{q-1}, y]$ contenu dans c . (fig. I.7). Finalement, il y a un arc du coarbre $\bar{H}$ sur $[y, x]_1$.

S'il existe un deuxième chemin élémentaire $[x, y]$ distinct de $[x, y]_1$, soit $[x, y]_2$, on peut faire le même raisonnement et montrer qu'alors il y a un arc du coarbre $\bar{H}$ sur $[x, y]_1$. Ce qui est impossible en vertu de la propriété I.5.

Donc G possède la propriété (P).

2°) Supposons qu'un graphe G possède la propriété (P).

a) Si G a un arc supprimable $u = (x,y)$, G_u possède la propriété (P) car G_u est fortement connexe et la suppression d'un arc laisse invariant ou diminue le nombre de chemins élémentaires entre deux sommets.

D'autre part, par u passe un seul circuit élémentaire. En effet puisque u est supprimable, il existe dans G un chemin élémentaire $[x,y]$ qui ne passe pas par u ; si par u passaient plusieurs circuits élémentaires, il existerait plusieurs chemins élémentaires $[y,x]$ et G ne vérifierait pas (P).

Donc $\xi(G) = \xi(G_u) + 1$ et comme $v(G) = v(G_u) + 1$, G est fccm si et seulement si G_u est fccm.

b) Si G n'a pas d'arc supprimable, considérons $G' = \Psi(G)$. Puisque G' n'a ni transmetteur ni boucle, il a au moins un arc supprimable (ch. 1, th. III.1). D'autre part, d'après la proposition IV.3 (ch.1), G' possède la propriété (P). Enfin, G' est fccm si et seulement si G est fccm (proposition I.11).

En effectuant successivement et alternativement les opérations Ψ et de suppression d'arcs (cette dernière opération tant que la forte connexité du graphe considéré est conservée), on obtient une suite de graphes G_i qui possèdent la propriété (P) et tels que le graphe G_i est fccm si et seulement si le graphe G_{i+1} l'est. On aboutit finalement à un graphe constitué par un sommet unique, obtenu par suppression des boucles du graphe de l'étape précédente. Donc G est fccm.

Remarques

1) la propriété (Q) entraîne la propriété (P). Un graphe Q -fortement connexe est bien fccm (ses blocs sont fccm).

2) dans l'énoncé de la propriété (P), on ne peut supprimer "appartenant à un même circuit élémentaire".

Contre-exemple :

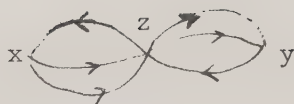


Fig. I.8

Ce graphe fccm a deux chemins élémentaires $[x,y]$ et deux chemins élémentaires $[y,x]$ parce que x et y n'appartiennent pas à un même circuit élémentaire.

Démonstration de la Proposition I.12. Un graphe connexe G est fccm si et seulement si ses blocs sont fccm.

Si G est connexe et ses blocs fccm, G est fortement connexe. Soit deux sommets x et y de G qui appartiennent à un même circuit élémentaire ; x et y sont nécessairement dans un même bloc (ch.1, P.I.5). Donc il existe un seul chemin élémentaire $[x,y]$ ou un seul chemin élémentaire $[y,x]$. Par suite G vérifie (P) et est fccm.

Si G est fccm, ses blocs sont fortement connexes. Soit un bloc B et deux sommets x et y de B appartenant à un même circuit élémentaire. Il existe un seul chemin élémentaire $[x,y]$ ou un seul chemin élémentaire $[y,x]$ et ces chemins sont dans B . Donc B est fccm.

II. GRAPHES SANS CIRCUIT CO-MINIMAUX.

Dans cette section, tous les graphes considérés sont des p -graphes sans boucle.

II.1. Définition.

Soit $S(n)$ la famille des graphes sans circuit, connexes, de n sommets ($n \geq 2$). Le nombre m des arcs d'un graphe de $S(n)$ n'est pas imposé : on a seulement $m \geq 1$. Tout graphe G de $S(n)$ a au moins $\lambda(G) = 1 = n-1$ cocircuits élémentaires (ch.1, P.II.6). Soit $S_0(n)$ l'ensemble des graphes de $S(n)$ qui ont 1 cocircuits élémentaires et 1 seulement. Nous montrerons plus loin que $S_0(n)$ n'est

pas vide.

Proposition II.1. *Tout graphe G de $S(n)$ qui a un coarbre de circulation K appartient à $S_0(n)$.*

La démonstration est la même que pour la proposition I.2. , à ceci près qu'on utilise cette fois une matrice de cocirculation fondamentale $\mathcal{L}_K = (\overline{\mathcal{P}}_K, I_1)$ associée au coarbre de cocirculation K et dont les lignes sont les éléments d'une base $\mathcal{B}$ du module des tensions Θ .

En partant du fait que tout cocircuit élémentaire de G autre que ceux de $\mathcal{B}$ ne peut être que la somme arithmétique de plusieurs cocircuits élémentaires de $\mathcal{B}$, on aboutit à la conclusion que les seuls cocircuits élémentaires sont ceux de $\mathcal{B}$.

Par suite G appartient à $S_0(n)$.

Les graphes de $S_0(n)$ sont les graphes de $S(n)$ qui ont le minimum de cocircuits élémentaires. D'où :

Définition II.1. *Un graphe sans circuit co-minimal est un graphe connexe sans circuit de n sommets dont le nombre total de cocircuits élémentaires est égal à $l = n-1$.*

Remarque II.1. Un graphe sans arc constitué par un seul sommet peut être considéré comme appartenant à $S_0(n)$ puisqu'il n'a pas de cocircuit.

II.2. Caractérisation.

THEOREME II.1.

Un graphe connexe sans circuit est un graphe sans circuit co-minimal si et seulement si il possède un coarbre de cocirculation.

Il reste à montrer qu'un graphe G de $S_0(n)$ possède un coarbre de cocirculation.

La démonstration est analogue à celle du théorème II.1. Le module Θ des tensions de G admet une base $\mathcal{B}$ de l cocircuits élémentaires

et G ne possède pas d'autre cocircuit élémentaire que ceux de $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{C}$ une matrice de cocirculation correspondant à $\mathcal{B}$. On montre que $\mathcal{C}$ est une matrice échelon. Donc, d'après la proposition II.7. (ch.1), G possède un coarbre au moins à partir duquel $\mathcal{B}$ peut être obtenue et puisque $\mathcal{B}$ est formée de cocircuits, ce coarbre est un coarbre de circulation.

II.3. Propriétés.

II.3.1. Propriétés d'un graphe de $S_0(n)$.

Un graphe G de $S_0(n)$ étant donné, on sait qu'il possède un coarbre de cocirculation K au moins. Considérons un tel coarbre K et la matrice de cocirculation fondamentale associée à cet arbre.

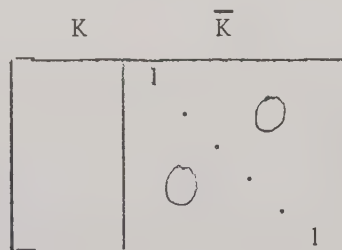


Fig.II.1

Tous les cocircuits élémentaires de G sont représentés par les vecteurs-lignes de $\mathcal{C}_K$. Les vecteurs-colonnes correspondant aux arcs de l'arbre $\bar{K}$ sont k vecteurs unités distincts.

Donc :

Proposition II.2. Par tout arc de l'arbre $\bar{K}$, passe un cocircuit élémentaire et un seul de G .

Proposition II.3. Tout cocircuit élémentaire de G contient un arc et un seul de $\bar{K}$.

Proposition II.4. Tout cocircuit élémentaire de G est formé d'un ensemble d'arcs de K et d'un seul arc de $\bar{K}$.

II.3.2. Inversion d'arcs.

Notons $S_1(n)$ l'ensemble des graphes G sans circuit co-minimaux de n sommets tels que par tout arc de G passe au moins un cycle

élémentaire.

Nous avons la proposition suivante :

Proposition II.5. Etant donné un graphe G de $\mathcal{G}_0(n, m)$ et un arbre de circulation H de G , on peut déduire de G un graphe de $S_1(n)$ en inversant $\delta = \min(k, l)$ arcs : soit les l arcs de H , soit les k arcs de $\bar{H}$.

En inversant les l arcs de H , et seulement les l arcs de H , dans G , on obtient un graphe G' . En inversant les k arcs et seulement les k arcs de $\bar{H}$ dans G , ce qui revient à inverser tous les arcs de G' , on obtient un graphe G'' .

Montrons que G' et G'' appartiennent à $S_1(n)$. Il suffit de le montrer pour G' ou G'' .

G' est connexe puisque G l'est. Montrons que G' est sans circuit. Considérons une matrice de circulation fondamentale de G associée à H : $\mathcal{C}_H = (I_k, \bar{\mathcal{C}}_H)$. Soit $\bar{\mathcal{C}}' = -\bar{\mathcal{C}}_H$. $\mathcal{C}' = (I_k, \bar{\mathcal{C}}')$ est une matrice cyclomatique fondamentale de G' . Un circuit de G' ne pourrait être qu'une somme arithmétique de vecteurs-lignes de $\mathcal{C}'$ à cause de la sous-matrice I_k de $\mathcal{C}'$. Mais une telle somme ne peut donner de circuit puisque $\bar{\mathcal{C}}'$ n'a que des coefficients égaux à 0 ou -1.

Considérons maintenant une matrice cocyclomatique fondamentale de G associée à $\bar{H}$: $\bar{D}_{\bar{H}} = (\bar{D}_{\bar{H}}, I_l)$. D'après la proposition I.10, $\bar{D}_{\bar{H}}$ n'a que des coefficients égaux à 0 ou -1. Soit K'' le coarbre de G'' déduit de $\bar{H}$ par inversion des arcs de $\bar{H}$ dans G . La matrice $D_{K''} = (-\bar{D}_{\bar{H}}, I_l)$ est une matrice cocyclomatique fondamentale de G'' . Tous ses coefficients étant égaux à 0 ou 1, c'est une matrice de cocirculation fondamentale. Donc G'' appartient à $S_0(n)$. Comme par tout arc de G passe au moins un cycle élémentaire, G'' appartient à $S_1(n)$.

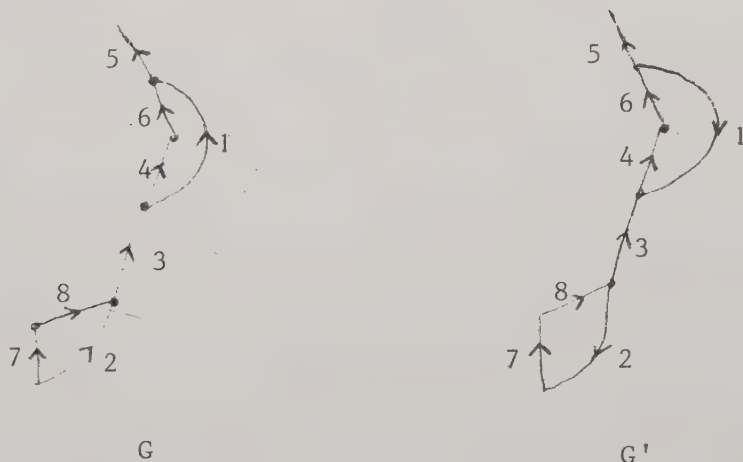
Le coarbre de cocirculation de G' est $\bar{H}$, celui de G'' s'obtient à partir de $\bar{H}$ en inversant tous les arcs de $\bar{H}$.

Nous avons la proposition duale :

Proposition II.6. Etant donné un graphe G de $S_1(n)$ ayant m arcs et un coarbre de cocirculation K de G , on peut déduire de G un graphe de $\mathcal{G}_0(n, m)$ en inversant soit les k arcs de K , soit les l arcs de $\overline{K}$.

Remarque II.2. Si nous considérons un graphe G de $S_0(n)$ de m arcs ($m > n-1$), non dans $S_1(n)$, et un coarbre de cocirculation K de G , en inversant les k arcs de K , on obtiendra un graphe G' connexe possédant un arbre de circulation mais non fortement connexe : G' sera engendré par des graphes fccm et des arcs par lesquels ne passent pas de cycle élémentaire. (Voir II.3.3. et III).

Exemple :



1	2	3	4	5	6	7	8
			1				
1			1				
				1			
1					1		
	1					1	
	1						1

$\mathcal{D}_K$

1	2	3	4	5	6	7	8
1			1		1		
	1					1	1

$\mathcal{C}_{\overline{K}}$

II.3.3. Suppression d'arcs

Considérons un graphe G de $S_0(n)$ et notons Λ_G (ou Λ) l'ensemble des arcs de G tels que par tout arc de Λ ne passe aucun cycle élémentaire de G .

Proposition II.7. Etant donné un graphe G de $S_0(n)$, non dans $S_1(n)$, le graphe G' déduit de G par suppression des arcs de Λ a pour composantes connexes des graphes G'_i de $S_1(n_i)$.

Remarque préliminaire :

Les graphes d'un seul sommet seront considérés comme appartenant à $S_1(1)$.

Dans G , chacun des arcs de Λ appartient nécessairement à tout arbre maximal de G donc à l'arbre $\bar{K}$ associé à tout coarbre de cocirculation K de G . Par tout arc (a,b) de Λ passe un cocircuit élémentaire de G et un seul constitué par l'arc (a,b) lui-même. En supprimant les q arcs de Λ , on supprime q cocircuits élémentaires de G . Supposons que G' ait p composantes connexes G'_i de n_i sommets. Soit η_i le nombre de cocircuits élémentaires de G'_i . Le nombre des cocircuits élémentaires de G est $\eta = \sum_{i=1}^p \eta_i + q$. Comme les composantes connexes de G' sont reliées 2 à 2 dans G par un arc unique (du fait de la connexité de G et de la définition de Λ) on a : $q = p-1$. Puisque G appartient à $S_0(n)$:

$$\eta = n-1 = n_1 + n_2 + \dots + n_p - 1$$

Donc :
$$\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_p = n_1 + n_2 + \dots + n_p - 1$$

Puisque G'_i est connexe sans circuit : $\eta_i \geq n_i - 1$.

Supposons qu'il existe un G'_i tel que $\eta_i > n_i - 1$. Alors :

$$\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_p > n_1 + n_2 + \dots + n_p - p$$

d'où contradiction.

Donc $G'_i \in S_0(n_i)$. Comme G'_i ne contient pas d'arc de Λ , $G'_i \in S_1(n_i)$.

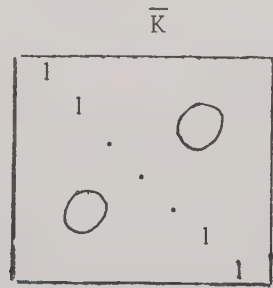
Remarque II.3.

On montrerait de même qu'en reliant 2 à 2 des graphes de $S_1(n_i)$ par une chaîne unique, on obtient un graphe de $S_0(n)$.

II.4. Obtention.

Proposition II.8. *Tout arbre est un graphe sans circuit co-minimal.*

Soit G un graphe constitué par un arbre de n sommets. Tout co-arbre K associé à cet arbre est le graphe partiel de G dont les sommets sont ceux de G et dont l'ensemble des arcs est vide. En ajoutant à ce coarbre un arc quelconque (a,b) de G , on crée un cocycle élémentaire de G et un seul : $\omega(A,B)$ (A et B étant respectivement les composantes connexes dans G de a et b), et ce cocycle élémentaire est un cocircuit élémentaire. K est donc un co-arbre de circulation et $G \in S_0(n)$. Remarquons que dans ce cas la matrice unité $(n-1) \times (n-1)$ est une matrice de cocirculation fondamentale de G .



Remarque II.4. On peut déduire cette proposition de la remarque II.3 en considérant que chaque sommet constitue un graphe de $S_1(1)$.

Proposition II.9. *En ajoutant à un graphe sans circuit co-minimal G un arc (x,y) tel qu'il existe un chemin $[x,y]$ sur l'arbre $\bar{K}$ associé à un coarbre de cocirculation K , on obtient un graphe sans circuit co-minimal.*

Soit G_1 le graphe obtenu. Soit G'_1 le graphe déduit de G_1 par suppression des arcs de Λ_G . Montrons que les composantes connexes G'_{1i} de G'_1 sont des graphes de $S_1(n_i)$. Les composantes connexes qui ne contiennent pas $[x,y]$ sont des composantes connexes de G' obtenu en supprimant les arcs de Λ_G . Il reste à montrer que la composante G'_{1i} qui contient $[x,y]$ est un graphe de $S_1(n_i)$. Soit G'_{11} cette composante. Soit G''_{11} le graphe déduit de G'_{11} par suppression de l'arc (x,y) . G''_{11} est composante connexe de G' ou bien plusieurs composantes reliées 2 à 2 par un chemin μ_i extrait de

$[x,y]$. En inversant les arcs de $\bar{K}$ qui sont dans G''_{11} on obtient un graphe fccm ou bien plusieurs reliés 2 à 2 par un chemin μ_i inversé. En complétant par (x,y) le graphe obtenu on a dans les deux cas un graphe fccm.

Donc le graphe déduit de G'_{11} en inversant tous les arcs de $\bar{K}$ dans G'_{11} est fortement connexe c-minimal. Donc G'_{11} est sans circuit co-minimal.

D'après la remarque II.3. , G_1 est sans circuit co-minimal.

C.Q.F.D.

D'après les deux propositions II.8 et II.9 , on peut donc obtenir un graphe de $S_0(n)$ en ajoutant certains arcs à un arbre de n sommets.

Rappelons que :

la proposition II.5 nous permet d'obtenir un graphe de $S_1(n)$ à partir d'un graphe de $\mathcal{G}_0(n,m)$ et la remarque II.3 un graphe de $S_0(n)$ non dans $S_1(n)$.

Nous pouvons également obtenir un graphe de $S_0(n)$ en appliquant la méthode matricielle (I.4.2.1) à une matrice cocyclomatique fondamentale associée à un coarbre K_0 d'un graphe G_1 , connexe, de n sommets (cette matrice n'a pas de vecteur colonne nulle puisque par tout arc d'un graphe connexe passe un cocycle élémentaire au moins).

Remarquons que :

Proposition II.10. Si un graphe G de $\mathcal{G}_0(n,m)$ possède une arborescence de circulation A , le graphe G' de $S_1(n)$ obtenu en inversant les arcs de $\bar{A}$ est quasi-fortement connexe inférieurement orienté à partir de A .

III. SOUS-MODULES UNIMODULAIRES DE $\mathbb{Z}^m$ ρ -MINIMAUX.

Soit M un sous-module unimodulaire de $\mathbb{Z}^m$ tel que M a un vecteur à composantes toutes positives. Il est alors engendré par ses générateurs positifs [Camion, 6]. Soit $\mathcal{B}$ une base de M , constituée par ρ générateurs positifs. Nous dirons que M est ρ -minimal si M n'a pas d'autres générateurs positifs que ceux de $\mathcal{B}$ (ce qui revient à dire que $\mathcal{B}$ est unique).

Proposition III.1. Si ρ générateurs positifs de M , constituant une base $\mathcal{B}$, sont les lignes d'une matrice échelon $\mathcal{U}$, M est ρ -minimal.

La démonstration généralise celle de la proposition I.2. (ch.2)

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de plusieurs éléments de $\mathcal{B}$. a) Si $\mathcal{E}$ est tel que deux éléments quelconques de $\mathcal{E}$ ont leurs supports disjoints, la somme de tous les éléments de $\mathcal{E}$ n'est pas un élément minimal de M . b) Sinon, leur somme a des composantes plus grandes ou égales à 2 et au moins $\bar{\rho}$ composantes égales à 1 et n'est donc pas un générateur.

D'après la proposition II.10 (ch.1), M n'a pas d'autre générateur positif que ceux de $\mathcal{B}$.

Réciproquement, supposons que M soit ρ -minimal. Soit $\mathcal{U}$ une matrice dont les lignes sont les ρ générateurs positifs qui engendrent M . En généralisant la démonstration du théorème I.1 (ch.2) grâce à la proposition II.11 (chap.1), on obtient :

THEOREME III.1.

Un sous-module unimodulaire de $\mathbb{Z}^m$ possédant un vecteur à composantes toutes positives est ρ -minimal si et seulement si les ρ générateurs positifs qui l'engendrent sont les lignes d'une matrice échelon.

Considérons un module M ρ -minimal ($\rho < m$) et $\mathcal{U}$ une matrice échelon dont les lignes sont les générateurs positifs de M . Nous pouvons écrire sans perte de généralité : $\mathcal{U} = (I_\rho, \mathcal{U}_\rho)$.

Soit M^* le module orthogonal de M dans $\mathbb{Z}^m$. L'ensemble des $v = m - \rho$ lignes de la matrice $\mathcal{Q}^* = (-{}^t\mathcal{A}_\rho, I_v)$ constitue une base de v générateurs de M^* [Camion, 6].

Les lignes de la matrice $\mathcal{Q}' = (\mathcal{Q}'_v, I_v)$ formée des colonnes non nulles de $({}^t\mathcal{A}_\rho, I_v)$ sont les générateurs positifs constituant une base $\mathcal{B}'$ d'un module M' . Ce module M' est unimodulaire et a un vecteur à composantes toutes positives ; $\mathcal{Q}'$ étant une matrice échelon, M' est v -minimal. D'où :

Proposition III.2. *A tout module ρ -minimal, $\rho < m$, est associé un module $(m-\rho)$ -minimal.*

Ce dernier résultat généralise le passage d'un graphe de $\mathcal{G}_0(n, m)$ à un graphe de $S_1(n)$ et réciproquement (propositions II.5 et II.6), et celui d'un graphe de $S_0(n)$ ayant m arcs ($m > n-1$) à un graphe connexe constitué de sous-graphes fccm et d'arcs par lesquels ne passe pas de cycle élémentaire et réciproquement. (Remarque II.2 et Paragraphe II.3.3.).

Tous ces résultats obtenus sur les sous-modules unimodulaires de $\mathbb{Z}^m$ s'appliquent aux digraphoïdes [Chaty, 3]

IV. SUPPRESSION D'ARCS ET C-MINIMALITE.

Les problèmes que nous allons examiner dans cette section sont les suivants :

les notions de c -minimalité et μ -minimalité pour un graphe fortement connexe sont-elles équivalentes ? Nous verrons qu'il n'en est rien. Alors se poseront les questions : quelles sont les relations entre les arcs supprimables d'un graphe fortement connexe c -minimal, non μ -minimal, et les arcs d'un arbre de circulation de ce graphe et ceux du coarbre associé ? Quelles en sont les conséquences, pour les graphes partiels fortement connexes d'un graphe fccm ? Comment caractériser un graphe fortement connexe à la fois c -minimal et μ -minimal ? A quelles conditions un graphe fortement connexe ni

c -minimal, ni μ -minimal a-t-il un graphe partiel fortement connexe c -minimal ?

Nous étudierons les applications des résultats obtenus.

IV.1. c -minimalité et μ -minimalité.

Soit, pour un graphe fortement connexe, p_c la propriété d'être fortement connexe c -minimal, p_μ la propriété d'être fortement connexe μ -minimal. Il existe des graphes qui vérifient p_c et p_μ (a), p_c et non p_μ (b), p_μ et non p_c (c), ni p_c ni p_μ (d).



Fig.IV.1 a b c d

Comment le montrent ces exemples, ceci est vrai pour les 1-graphes.

IV.2. Arcs supprimables d'un graphe fccm.

IV.2.1. Graphes partiels fortement connexes d'un graphe fccm.

Considérons un graphe fccm G non μ -minimal.

Proposition IV.1. Soit H un arbre de circulation quelconque de G . Tout arc de H est non supprimable.

Supposons qu'un arc (x,y) de H soit supprimable. Il existe alors dans G un chemin élémentaire $\mu_1 = [x,y]$ différent de (x,y) . Or puisque G est fortement connexe, il existe dans G un chemin élémentaire $\mu_2 = [y,x]$. Les chemins μ_1 et μ_2 déterminent un ou plusieurs circuits élémentaires c^i ne contenant pas (x,y) . Chaque c^i est formé d'un chemin de H et d'un arc de $\bar{H}$ (Ch.2, proposition I.6). On peut donc trouver une chaîne $[x,y]$ qui ne contient que des arcs de H , ce qui est impossible puisque (x,y) est dans H .

On déduit de cette proposition :

Proposition IV.2. *Tout arc supprimable de G appartient au coarbre $\bar{H}$ associé à n'importe quel arbre de circulation H de G .*

En effet, soit u un arc supprimable de G . Etant donné un arbre de circulation H quelconque de G , $u \in H$ ou bien $u \in \bar{H}$. On ne peut avoir $u \in H$ car u ne serait pas supprimable. Donc $u \in \bar{H}$.

Nous avons le corollaire :

Proposition IV.3. *Tout circuit élémentaire de G contient un arc supprimable de G au plus.*

Proposition IV.4. *Soit H un arbre de circulation quelconque de G . Si G_u est fortement connexe, G_u est fccm et H est un arbre de circulation de G_u .*

Si G_u est fortement connexe, alors nécessairement $u \in \bar{H}$ d'après la proposition IV.2. H , qui conserve tous ses arcs dans G_u , est un arbre de circulation de G_u . Donc G_u est fccm et H est un arbre de circulation de G_u .

Nous en déduisons :

Proposition IV.5. *Tout graphe partiel fortement connexe G' d'un graphe fccm G est fccm et tout arbre de circulation de G est un arbre de circulation de G' .*

En effet, tout graphe partiel fortement connexe de G est obtenu en supprimant un ou plusieurs arcs supprimables de G . Après chaque suppression d'un arc, on obtient un graphe fccm possédant les arbres de circulation de G .

Poursuivons cette opération de suppression tant que la forte connexité est conservée. On obtient :

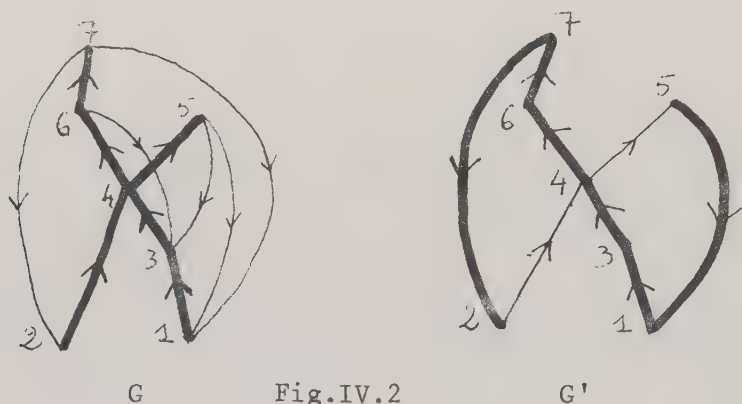
THEOREME IV.1.

Tous les graphes partiels G' fortement connexes μ -minimaux d'un graphe G fccm sont fccm et tout arbre de circulation de G est

un arbre de circulation de G' .

Remarque IV.1. Tout arbre de circulation de G' n'est pas nécessairement un arbre de circulation de G .

Contre-exemple.



H' formé des arcs $(5,1), (1,3), (3,4), (4,6), (6,7), (7,2)$ est un arbre de circulation de G' mais n'est pas un arbre de circulation de G (dans G , $(5,3)$ ne forme pas de circuit avec $(5,1)$ et $(1,3)$).

IV.2.2. Graphes partiels fortement connexes α -minimaux d'un graphe fccm.

Etant donné un graphe fccm G tout graphe partiel fortement connexe α -minimal G' de G est μ -minimal, donc fccm.

D'après ce qui précède tout G' sera obtenu à partir d'un arbre de circulation H quelconque de G en lui ajoutant un nombre minimal $q(H)$ d'arcs de G nécessaires pour le rendre fortement connexe. Comme tout arbre de G a $n-1$ arcs et tous les G' le même nombre d'arcs, soit m' , $q(H)$ ne dépend pas de H : on le notera q .

Proposition IV.6. Etant donné un graphe fccm G , le nombre d'arcs d'un graphe partiel fortement connexe α -minimal G' de G est $m' = n-1+q$, q étant le nombre minimal d'arcs de G qu'il faut ajouter à un arbre de circulation H quelconque de G pour obtenir un graphe fortement connexe.

IV.2.3. Arcs supprimables et arbres de circulation.

Précisons maintenant les relations entre les arcs supprimables ou non supprimables d'un graphe fortement connexe c -minimal G et les arcs d'un arbre de circulation de G ou du coarbre associé.

Proposition IV.7. Si par un arc u de G , passent plusieurs circuits élémentaires alors u n'est pas supprimable et u appartient à tout arbre de circulation H de G .

En effet, si u était supprimable, alors d'après la proposition IV.2 il appartiendrait au coarbre $\bar{H}$ associé à tout arbre de circulation H . Par u , passerait un seul circuit élémentaire.

Si u n'appartenait pas à un certain arbre de circulation H de G , il appartiendrait au coarbre $\bar{H}$ associé à H et par u passerait un seul circuit élémentaire.

Examinons le cas d'un arc u non supprimable et par lequel passe un seul circuit élémentaire.

Proposition IV.8. Si par un arc u de G , non supprimable, passe un seul circuit élémentaire, alors il existe un arbre de circulation H de G tel que u appartienne à H .

Soit un tel arc u . Soit un arbre de circulation H de G . Si $u \in H$, la proposition est démontrée. Sinon, $u \in \bar{H}$. Nous allons exhiber un arbre de circulation H_1 tel que $u \in H_1$. Pour cela, nous allons trouver un arc α tel que $H_1 = (H \cup \{u\}) - \alpha$ avec la condition : H_1 est un arbre et tout cycle élémentaire associé à H_1 est un circuit.

Posons $u = (x, y)$. Puisque $u \in \bar{H}$, il détermine avec H un circuit élémentaire composé de u et du chemin élémentaire $[y, x]$, unique et contenu dans H (Proposition I.6.). Si le chemin $[y, x]$ est composé d'un arc unique (y, x) , l'arc α qui convient est (y, x) . Sinon, numérotons le chemin $[y, x]$ de la manière suivante : $[y, x] = [y, 1, \dots, q, x]$. Classons en 3 familles les arcs qui peuvent former des circuits avec des chemins strictement contenus dans $[y, x]$:

les arcs (i,y) , les arcs (x,j) , les arcs (l,k) ($k < l$). Remarquons tout de suite que pour tout i et pour tout j , on a $i < j$ sinon il existerait un chemin $[x,j,i,y]$ et (x,y) serait supprimable. Nous allons d'abord énoncer les contraintes pour le choix de α dans le cas où aucune de ces familles n'est vide.

a) Supposons que pour tout i et pour tout k , on a $i < k$.

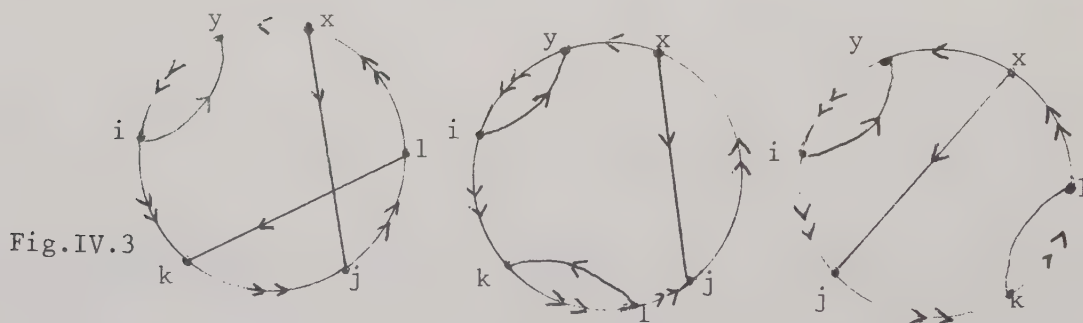
Les seules possibilités de classement en ordre croissant pour un quadruplet (i,j,k,l) quelconque sont alors :

$$i \ k \ j \ l$$

$$i \ k \ l \ j$$

$$i \ j \ k \ l$$

La figure IV.3 indique les configurations correspondantes



(les chemins qui peuvent avoir plusieurs arcs sont indiqués par des doubles flèches).

Soit i_0 le plus grand des i et h_0 le plus petit des j et des k . Prenons $\alpha = (r,s) \subset [y,x]$ avec $i_0 \leq r < s \leq h_0$. H_1 est bien un arbre car en ajoutant u à H nous créons un cycle et un seul que nous éliminons en supprimant α . Tous les cycles élémentaires associés à H_1 sont des circuits : ce sont les mêmes que ceux associés à H ; ils sont obtenus par les mêmes arcs de complément sauf le circuit $[x,y,x]$ obtenu en complétant H par (x,y) et H_1 par (r,s) .

b) Supposons qu'il existe au moins un i et au moins un k tels que $i \geq k$. Alors nécessairement, pour tout l et pour tout j , on a $l < j$. En effet s'il existait un l et un j tels que $l \geq j$, il existerait un chemin $[x,j,l,k,i,y]$ et u serait supprimable (fig. IV.4).

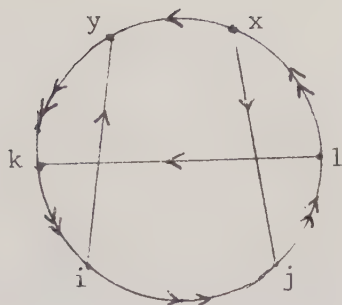


Fig. IV.4

Les seules possibilités de classement en ordre croissant pour un quadruplet quelconque (i, j, k, l) sont alors :

$$\begin{array}{l} i \ k \ l \ j \\ k \ i \ l \ j \\ k \ l \ i \ j \end{array} \quad (\text{fig. IV.5})$$

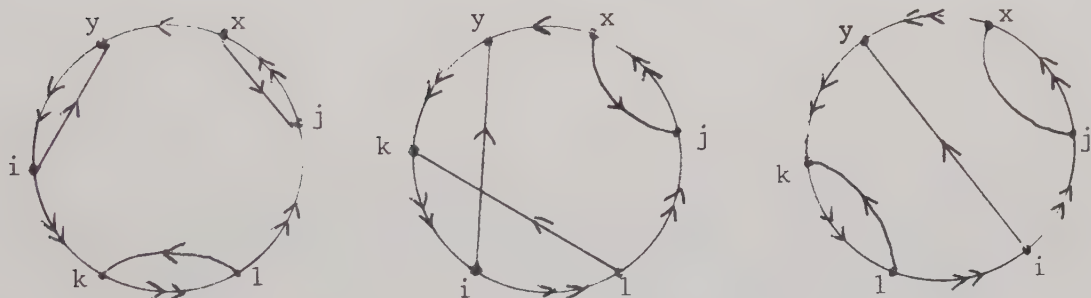


Fig. IV.5

Soit h_0 le plus grand parmi tous les i et les l et j_0 le plus petit des j . Prenons $\alpha = (r, s) \subset [y, x]$ avec $h_0 \leq r < s \leq j_0$. Par le même raisonnement que précédemment, nous pouvons montrer que α convient.

Examinons maintenant le cas où l'une ou plusieurs des familles suivantes sont vides : la famille A des arcs (i, y) , la famille des arcs (x, j) , la famille C des arcs (l, k) .

Si A, B, C sont vides, on prend pour α un arc quelconque de $[y, x]$

Si B et C sont vides, on prend $\alpha = (r, s) \subset [y, x]$ avec $i_0 \leq r < s$, i_0 étant le plus grand des i .

Si A et C sont vides, $\alpha = (r, s) \subset [y, x]$ avec $r < s \leq j_0$,

j_0 étant le plus petit des j .

Si A et B sont vides, on prend soit $\alpha = (r,s) \subset [y,k_0] \subset [y,x]$, k_0 étant le plus petit des k , soit $\alpha = (r,s) \subset [l_0,x] \subset [y,x]$, l_0 étant le plus grand des l .

Si C est vide, on prend $\alpha = (r,s) \subset [y,x]$ avec $i_0 \leq r < s \leq j_0$.

Si A est vide, on prend $\alpha = (r,s) \subset [y,h_0] \subset [y,x]$, h_0 étant le plus petit parmi les h et les j .

Si B est vide, on prend $\alpha = (r,s) \subset [h_0,x] \subset [y,x]$, h_0 étant le plus grand parmi les h et les i .

Des propositions IV.1. et IV.7., IV.8., nous déduisons le théorème :

THEOREME IV.2.

Dans un graphe fortement connexe c-minimal G , un arc n'est pas supprimable si et seulement si il appartient à un des arbres de circulation de G .

Ce qui peut s'énoncer encore :

Dans G , un arc est supprimable si et seulement si il appartient au coarbre associé à tout arbre de circulation de G .

Un graphe fortement connexe c-minimal G étant donné, on peut classer les arcs en trois familles :

- A) arcs supprimables.
- B) arcs non supprimables par chacun desquels passent plusieurs circuits.
- C) arcs non supprimables par chacun desquels il passe un seul circuit élémentaire.

On sait que les arcs de A appartiennent au coarbre de tout arbre de circulation, ceux de B à tout arbre de circulation, ceux de C à au moins un arbre de circulation.

Applications

1) Recherche des arbres de circulation d'un graphe fccm . Un autre procédé sera indiqué plus loin.

2) Il existe des graphes fccm qui n'ont pas d'arborescence de circulation ni d'arborescence de circulation inversée.

Prenons l'exemple donné dans la remarque I.3. . Les arcs $(1,3)$, $(2,3)$, $(7,8)$, $(7,9)$ sont non supprimables et par chacun d'eux passent plusieurs circuits élémentaires donc ils appartiennent à tout arbre de circulation. Celui-ci ne peut donc être ni une arborescence, ni une arborescence inversée.

IV.2.4. Graphes fccm μ -minimaux.

Du théorème IV.2 , nous déduirons une caractérisation des graphes fortement connexes c -minimaux et μ -minimaux.

THEOREME IV.3.

Un graphe fortement connexe c -minimal G est fortement connexe μ -minimal si et seulement si tout arc appartient à un des arbres de circulation de G .

Voici maintenant une condition suffisante de μ -minimalité pour les graphes fccm.

Proposition IV.9. *Si un graphe G de $\mathcal{G}_0(n,m)$ possède un arbre de circulation H tel que :*

$$\max\{a(H), b(H)\} = m - n + 1$$

Alors G est fortement connexe μ -minimal.

En effet, d'après la proposition I.13 , le nombre maximal d'arcs de G est atteint relativement à la structure de H .

Conjecture.

Un graphe fccm μ -minimal possède une arborescence de circulation.

IV.3. Graphes fortement connexes hyper c-minimaux.

IV.3.1. Définitions et conditions d'hyper c-minimalité.

Un graphe fortement connexe qui n'est pas μ -minimal n'a pas nécessairement de graphe partiel fccm.

Exemple

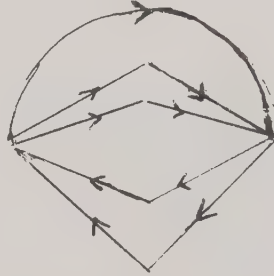


Fig. IV.6

D'où :

Définition IV.1. Un graphe fortement connexe hyper c-minimal G (fchcm) est un graphe fortement connexe non μ -minimal qui possède un graphe partiel fccm.

Autrement dit, si $G = (X, U)$ est fchcm, on peut faire une partition au moins de U en trois parties : U_H , $U_{\bar{H}}$, U_S . Les arcs de U_H forment un arbre maximal H de G . Chaque arc de $U_{\bar{H}}$ détermine avec H un circuit élémentaire et un seul. U_S est une famille supprimable de G .

Proposition IV.10. Dans tout graphe fortement connexe non μ -minimal G de n sommets et m arcs, toute famille supprimable V est telle que :

$$\xi(G) - v(G) \geq v_G(V) - |V| \quad (1)$$

Soit $G' = G_V$. $\xi(G') = \xi(G) - v_G(V)$ par définition de $v_G(V)$.

Supposons que : $\xi(G) - v(G) < v_G(V) - |V|$

Alors $\xi(G) - v_G(V) < m - n + 1 - |V|$

donc $\xi(G') < m' - n + 1$ (m' étant le nombre d'arcs de G'). Ce qui est impossible puisque G' est fortement connexe.

Remarque : Si G est fccm non μ -minimal, (1) devient :

$$v_G(V) - |V| \leq 0 .$$

Mais d'après la proposition IV.2, nous pouvons préciser :

Proposition IV.11. Dans tout graphe G fccm non μ -minimal, toute famille supprimable V est telle que : $v_G(V) = |V|$.

En effet, nous savons qu'en supprimant un arc supprimable nous supprimons un circuit élémentaire et un seul et tout circuit élémentaire contient un arc supprimable au plus.

L'égalité de (1) est donc réalisée pour toute famille supprimable d'un graphe fccm. Nous allons voir que l'existence d'une famille supprimable au moins réalisant l'égalité de (1) caractérise les graphes fchcm.

Proposition IV.12. Un graphe fortement connexe G est fortement connexe hyper-c-minimal si et seulement si il existe une famille d'arcs V supprimable telle que :

$$\xi(G) - v(G) = v_G(V) - |V|$$

Supposons que G possède un graphe partiel G' fortement connexe c-minimal. Soit V l'ensemble des arcs de G qui ne sont pas dans G' . $\xi(G') = \xi(G) - v_G(V)$.

G' étant fortement connexe c-minimal, $\xi(G') = v(G') = m' - n + 1$ donc

$$\xi(G) - v_G(V) = m' - n + 1 = m - |V| - n + 1 = v(G) - |V|$$

Réciproquement, si dans G une famille V supprimable existe telle que

$$\xi(G) - v(G) = v_G(V) - |V| ,$$

le graphe $G' = G_V$ est fortement connexe et a $\xi(G') = \xi(G) - v_G(V)$

circuits élémentaires, donc :

$$\xi(G') = v(G) - |V| = m+n-1 - |V| = m'-n+1 = v(G')$$

Par suite G' est fortement connexe c -minimal.

Un graphe fortement connexe c -minimal non μ -minimal peut être considéré comme un graphe fortement connexe hyper- c -minimal particulier.

Nous appellerons graphe fortement connexe strictement hyper- c -minimal un graphe fortement connexe hyper- c -minimal qui n'est pas fortement connexe c -minimal.

Proposition IV.13. Dans un graphe fortement connexe strictement hyper- c -minimal G , il existe une famille V supprimable telle que :

$$v_G(V) > |V|$$

En effet, d'après la proposition IV.12, il existe dans G une famille V telle que $\xi(G) - v(G) = v_G(V) - |V|$. Mais, comme G n'est pas fortement connexe c -minimal : $\xi(G) > v(G)$.

Proposition IV.14. Un graphe G connexe est fchcm si et seulement si ses blocs sont fchcm.

Supposons $G = (X, U)$ connexe et ses blocs $G_i = (X_i, U_i)$ fchcm. Dans chaque G_i , il existe une famille supprimable V_i telle que $(X_i, U_i - V_i)$ est fccm. Le graphe partiel de $G : (X, U - \bigcup_i V_i)$ a pour blocs les graphes $(X_i, U_i - V_i)$. Il est donc fccm.

Si $G = (X, U)$ est fchcm, il admet une famille supprimable V telle que $(X, U - V)$ est fccm. $V_i = V \cap U_i$ est une famille supprimable de G_i et $V = \bigcup_i (V \cap U_i)$. En effet, pour tout $u = (x, y) \in V$, x et y sont dans un bloc G_i et tout chemin élémentaire $[x, y]$ distinct de u est nécessairement dans G_i . Le graphe $(X, U - V)$ a pour blocs les graphes $(X_i, U_i - V_i)$ qui sont donc fccm. Chaque G_i est donc fchcm.

Proposition IV.15. Si un graphe G fortement connexe admet une famille supprimable V telle que le graphe G' déduit de G en inversant certains arcs de V est fccm, alors G est fchem.

Soit $G = (X, U)$, $G' = (X, U')$

On peut poser $U = U_0 \cup V$, $U' = U_0 \cup V'$

Alors $G_V = G'_V = (X, U_0)$

Puisque G_V est fortement connexe, G'_V l'est. G'_V , étant un graphe partiel fortement connexe de G' est fccm (Proposition IV.5) Donc G_V est fccm et G est fchem.

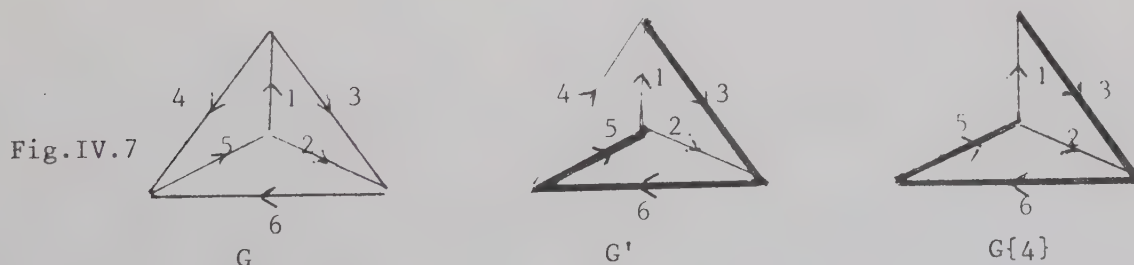
Remarque : L'ensemble V_1 des arcs de V qui sont inversés dans G' constitue évidemment une famille supprimable de G puisque $V_1 \subset V$. On peut donc remplacer dans l'énoncé de la proposition "certains" par "les".

D'autre part, on sait qu'un graphe G étant donné, connexe et tel que par chaque arc passe au moins un cycle élémentaire (c'est le cas d'un graphe fortement connexe), on peut en inversant certains arcs obtenir un graphe fccm. (méthode de Camion ou de Crestin).

La proposition IV.15 a donc pour conséquence

Proposition IV.16. Un graphe fortement connexe G est fchem si les arcs que l'on inverse pour déduire de G un graphe fccm constituent une famille supprimable de G .

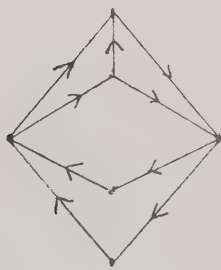
Exemple : (I.4.2.1)



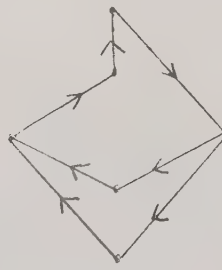
On a déduit de G (fortement connexe) un graphe fccm G' en inversant dans G l'arc 4. Or cet arc est supprimable dans G , donc G est fchem.

IV.3.2. Graphes partiels d'un graphe fchcm.

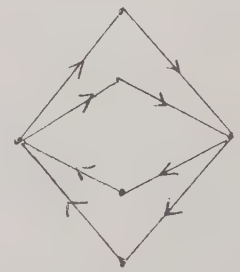
Un graphe fchcm G ayant, par définition, un graphe partiel fccm, possède, d'après le théorème IV.1 un graphe partiel fccm μ -minimal. Mais tous les graphes partiels fortement connexes μ -minimaux de G ne sont pas nécessairement fccm, comme le montre l'exemple suivant :



G fchcm



G' graphe partiel de G , fccm μ -minimal



G_1 graphe partiel de G , μ -minimal non fccm

Fig.IV.8.

Nous conjecturons que, parmi tous les graphes partiels fccm d'un graphe G fchcm, ceux qui ont le minimum d'arcs soit m' (ou ce qui revient au même, le minimum de circuits élémentaires soit k') sont des graphes partiels fortement connexes α -minimaux de G .

Notons, à propos des graphes α -minimaux, qu'on ne dispose pas actuellement à notre connaissance d'algorithme efficace de recherche. Celui proposé dans [D.M.MOYLES and G.L.THOMPSON] ramène cette recherche à celle d'un graphe partiel fortement connexe α -minimal d'un graphe fortement connexe mais le résultat sur lequel est dit être fondée cette dernière est erroné. Ce résultat peut s'énoncer :

"Un graphe partiel fortement connexe α -minimal G' d'un graphe fortement connexe G est une séquence complète minimale" (circuit de longueur minimale passant par tous les sommets de G et pouvant passer plusieurs fois par le même arc).

PERLES nous a communiqué un contre-exemple de Roy qui infirme cette assertion :

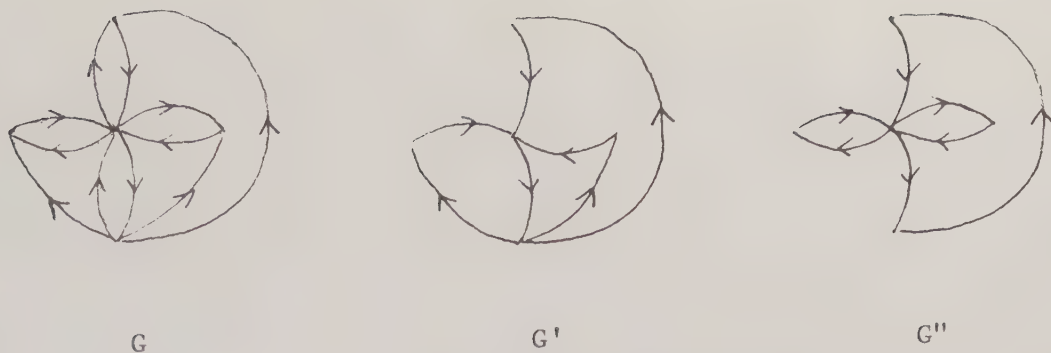


Fig. IV.9

G' est bien α -minimal mais donne une séquence complète de longueur 9, alors que G'' est une séquence complète de longueur 7.

En réalité, l'algorithme proposé s'appuie non sur le "théorème" précédent mais sur sa réciproque. Nous montrons par le contre-exemple suivant que celle-ci est également fausse :

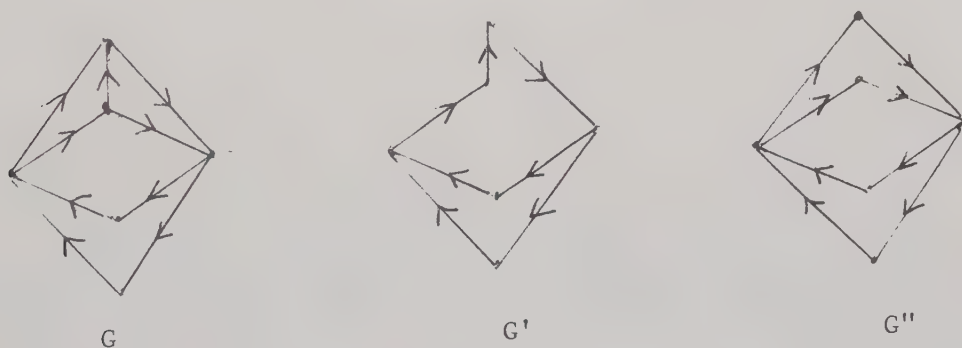


Fig. IV.10

G'' est une séquence complète minimale (longueur 8) mais G' , α -minimal, a 7 arcs (notons que G' donne une séquence complète de longueur 10 et fournit donc un autre contre-exemple pour le "théorème" direct).

Recherche des graphes partiels fccm d'un graphe fchcm, ayant le minimum d'arcs.

Cette recherche généralise celle des circuits hamiltoniens effectuée par ROY [Roy, 1]. On peut supposer que les graphes donnés sont des 1-graphes.

Nous pouvons énoncer , parallèlement à ce travail et compte-tenu des résultats précédents :

Proposition IV.17. Un graphe de n sommets et m arcs ayant un graphe partiel fccm de k' circuits élémentaires est fortement connexe et admet une famille V supprimable de $m-n+1-k'$ arcs.

Proposition IV.18. Tout graphe partiel fccm d'un graphe fchcm G contient les arcs non supprimables de G .

La recherche proposée ici consiste à trouver un graphe partiel fccm μ -minimal de k' circuits élémentaires, k' minimal.

Proposition IV.19. Pour qu'un graphe G admette un graphe partiel fccm de k' circuits élémentaires il faut qu'il soit fchcm et qu'en chaque sommet x il admette une famille supprimable formée de $s^+(x)$ arcs incidents extérieurs et de $s^-(x)$ arcs incidents intérieurs tels que :

$$\begin{aligned} d_G^+(x) - 1 &\geq s^+(x) \geq d_G^+(x) - k' \\ d_G^-(x) - 1 &\geq s^-(x) \geq d_G^-(x) - k' \end{aligned}$$

En effet, la présence dans un graphe fortement connexe G' de q arcs incidents intérieurement (ou extérieurement) à un même sommet révèle l'existence d'au moins q circuits élémentaires dans G' .

Puisque l'on cherche un graphe partiel fccm ayant k' circuits élémentaires, k' minimal, nous pouvons d'abord déterminer une borne inférieure de k' :

$$k' \geq \max_{x \in X} (\max \{ d^+(x) - s^+(x), d^-(x) - s^-(x) \})$$

et la prendre comme valeur de départ.

La recherche pourra s'effectuer de la manière suivante :

Soit $G = (X, U)$ le graphe fchcm considéré. On constituera une suite de partitions $P_1, \dots, P_i, P_{i+1}, \dots$ de U en trois sous-ensembles : ensembles des arcs épais, des arcs hachurés, des arcs

fins. La partition P_{i+1} sera obtenue à partir de la partition P_i suivant les règles énoncées ci-dessous (qui peuvent d'ailleurs donner plusieurs partitions P_{i+1} différentes). Dans une partition P_i , on a par définition :

arcs épais : arcs devant appartenir à tout graphe fccm de k' circuits élémentaires pouvant être issu de P_i .

arcs hachurés : arcs qui n'appartiendront pas à un tel graphe.

arcs fins : arcs ni épais, ni hachurés.

Soit E , A , F , les ensembles d'arcs respectivement épais, hachurés, fins.

La dernière partition est celle pour laquelle $F = \emptyset$. Les arcs épais constituent alors le graphe cherché, s'il est fccm. (On a dans cecas : $|A| = m - n + 1 - k'$: Proposition IV. 17)

Une partition sera dite non convenable si elle ne peut fournir un graphe fccm de k' circuits élémentaires.

Règle 1 - Tout arc u fin non supprimable dans $(X, F \cup E)$ peut être épaissi s'il n'y a pas déjà k' arcs épais incidents extérieurement (ou intérieurement) au même sommet que u .

Règle 2 - Tout arc u fin ayant même extrémité initiale ou même extrémité terminale qu'un arc épais peut être hachuré s'il est supprimable dans $(X, F \cup E)$. S'il ne l'est pas et s'il y a déjà k' arcs épais incidents extérieurement (ou intérieurement) au même sommet que u , la partition n'est pas convenable.

Règle 3 - Tout arc fin dont l'épaississement créerait un $(k'+1)^e$ circuit élémentaire formé d'arcs épais peut être hachuré s'il est supprimable dans $(X, F \cup E)$. S'il ne l'est pas, la partition n'est pas convenable.

Si tous les essais donnent des partitions non convenables, on augmente k' d'une unité et on recommence.

Exemples :

1)

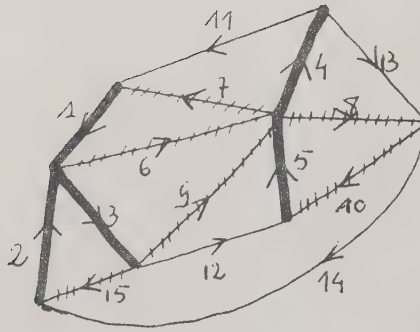
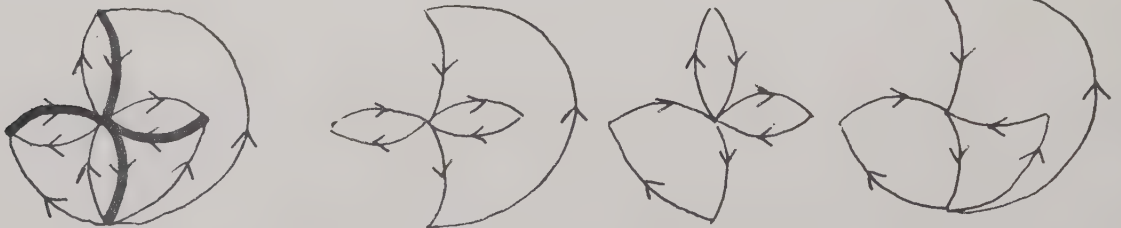


Fig.IV.11

On épaissit les arcs non supprimables : 1, 2, 3, 4, 5. La présence de 1 et 2 indique qu'il faut commencer avec $k' = 2$. On hachure successivement 6, 7, 8, 9, 10 (Règle 2). On épaissit 11, 12, 13, 14 (règle 1). On hachure 15 (règle 2 ou 3).

2)

 $k' = 3$

Graphes fccm obtenus

Fig.IV.12

Remarques

- 1) Cette recherche peut évidemment être appliquée aux graphes fccm.
- 2) Supposons qu'on applique cette méthode de recherche à un graphe fortement connexe G sans savoir a priori s'il est fchcm. Si pour tout $k' \leq m-n+1$, toutes les partitions finales ($F = \emptyset$) donnent des graphes non fccm, on peut conclure que G n'est pas fchcm.

V. SUPPRESSIONS D'ARCS ET CO-MINIMALITE.

V.1. Arcs supprimables d'un graphe sans circuit co-minimal.

Proposition V.1. *Tout arc de K est supprimable.*

Tout arc de $\bar{K}$ est non supprimable.

Les arcs de Λ_G (qui appartiennent à $\bar{K}$) ne sont pas supprimables. Le cas de ces arcs étant vu, on peut s'intéresser maintenant aux composantes connexes de G' obtenu à partir de G en supprimant les arcs de Λ_G et ces composantes étant des graphes de $S_1(n)$ (proposition II.7), on peut supposer que G est un graphe de $S_1(n)$.

Considérons un arc (x,y) de K . En inversant tous les arcs de K , on déduit de G un graphe fortement connexe-co-minimal G'' d'arbre de circulation $\bar{K}$. Dans ce graphe, par l'arc (y,x) passe un circuit élémentaire et un seul constitué par cet arc et un chemin $[x,y]$ sur $\bar{K}$. Donc dans G , pour tout arc (x,y) de K , il existe un chemin $[x,y]$ sur $\bar{K}$ et un seul : (x,y) est supprimable. (il peut exister d'autres chemins $[x,y]$ mais non sur $\bar{K}$).

Considérons un arc (x,y) de $\bar{K}$. Supposons qu'il soit supprimable : il existe dans G un chemin $[x,y]$ distinct de (x,y) . Dans G'' , ce chemin va donner une chaîne composée de chemins alternativement sur K et $\bar{K}$: $[z_i, t_i]$ sur $\bar{K}$, $[z_{i+1}, t_i]$ sur K . Comme dans G'' par tout arc u de K passe un circuit élémentaire dont tous les arcs sauf u sont dans $\bar{K}$, on va avoir dans G'' le chemin $[x, z_1, t_1, z_2, t_2, \dots, z_p, y]$ formé d'arcs de $\bar{K}$ et qui avec (x,y) de $\bar{K}$ va donner un cycle, ce qui est impossible puisque $\bar{K}$ est un arbre.

Proposition V.2. *Soit $G \in S_0(n)$ ayant au moins n arcs et K un coarbre de cocirculation de G ; si $u \in K$, alors $G_u \in S_0(n)$ et $K-u$ est un coarbre de cocirculation de G_u .*

D'après l'hypothèse, K a au moins un arc.

On peut construire G_u par étapes en ajoutant successivement au graphe sans circuit co-minimal constitué par $\bar{K}$ tous les arcs de

K sauf u . On obtient à chaque étape, donc à la dernière un graphe de $S_0(n)$. En effet à tout arc (x,y) de K correspond un chemin $[x,y]$ sur $\bar{K}$. Ajouter un tel arc au graphe de l'étape précédente conserve la co-minimalité (Proposition II.9).

L'arbre associé au coarbre $K-u$ de G_u est $\bar{K}$.

V.2. Squelette d'un graphe sans circuit co-minimal.

Proposition V.3. *Le squelette d'un graphe sans circuit co-minimal est un arbre.*

Soit G un graphe de $S_0(n)$ et K un coarbre de cocirculation de G . En supprimant un arc de K on obtient un graphe partiel G_u de G μ -équivalent à G et G_u est un graphe de $S_0(n)$ de coarbre de cocirculation $K-u$. On peut poursuivre l'opération tant que le coarbre de cocirculation contient un arc. On obtient finalement un graphe de $S_0(n)$ constitué par un arbre. Cet arbre est associé à chaque coarbre de cocirculation trouvé à chaque étape.

Proposition V.4. *Un graphe de $S_0(n)$ possède un seul coarbre de cocirculation K .*

S'il y en avait deux K_1 et K_2 , il y aurait deux arbres associés $\bar{K}_1$ et $\bar{K}_2$ donc deux squelettes de $S_0(n)$ ce qui est impossible. (Ch. I, Prop. III.5)

Proposition V.5. *Si le squelette d'un graphe sans circuit G est un arbre H , alors G est sans circuit co-minimal.*

Soit V telle que $G_V = H$. Tout $(x,y) \in V$ est tel qu'il existe un chemin élémentaire $[x,y]$ ne passant pas par V ; ce chemin est donc dans H . On peut construire G à partir de H en ajoutant des arcs (x,y) tels qu'il existe un chemin élémentaire $[x,y]$ dans H . H étant sans circuit co-minimal, il en est de même pour G .

On obtient ainsi une nouvelle caractérisation des graphes sans circuit co-minimaux.

VI. RECHERCHE DES ARBRES DE CIRCULATION ET DES COARBRES DE COCIRCULATION.

VI.1. Recouvrement des arcs par des circuits.

Considérons un graphe G fortement connexe. Soit $\mathcal{F}$ une famille de circuits élémentaires de G tels que par chaque arc de G passe un circuit de $\mathcal{F}$ au moins (Si A est la matrice circuits élémentaires arcs, $\mathcal{F}$ correspond à un LC). Soit a_i le nombre de circuits élémentaires de $\mathcal{F}$ qui passent par l'arc i . La somme de tous les circuits élémentaires de $\mathcal{F}$ est un flot, vecteur de m coordonnées a_i , appartenant à Φ . Pour tout sommet x de G on a donc

$$\sum_{i \in \omega^+(x)} a_i = \sum_{i \in \omega^-(x)} a_i \quad (1)$$

Réciproquement, si les arcs de G sont valués par des entiers positifs a_i vérifiant (1), le vecteur $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ est un flot positif, combinaison linéaire positive de circuits élémentaires de G , donc donne une famille $\mathcal{F}$.

Un flot positif étant obtenu, si, pour tous les arcs d'un circuit de G , on a $a_i > a \geq 1$, on peut substituer à ces a_i les valeurs : $a_i - a$, on aura encore un vecteur (a_i) vérifiant (1). On peut effectuer cette opération tant qu'il existe un tel circuit. Lorsqu'il n'en existe plus, on obtient un flot positif minimal (a_i) donc une famille

$\mathcal{F}$ minimale : c'est-à-dire qui ne contient pas strictement une famille $\mathcal{F}'$ ($\mathcal{F}$ minimale correspond à un LC minimal). Toute famille $\mathcal{F}$ minimale est telle que tout circuit élément de $\mathcal{F}$ contient au moins un arc valué 1. Chaque circuit de $\mathcal{F}$ contient donc un arc que ne contiennent pas les autres : les circuits de $\mathcal{F}$ sont indépendants.

A un flot positif minimal (a_i) peuvent correspondre plusieurs famille $\mathcal{F}$ minimales.

Algorithme de recherche d'une famille $\mathcal{F}$ minimale.

1) Tous les arcs sont valués 0.

2) Augmenter de 1 la valuation des arcs des circuits de G et ceci tant qu'il existe un arc valué 0 (choisir de préférence des circuits ayant peu ou pas d'arcs communs).

3) Diminuer de a la valuation des arcs des circuits pour lesquels $a_i > a \geq 1$ tant que c'est possible.

4) Pour trouver une famille $\mathcal{F}$, extraire un circuit élémentaire en diminuant de 1 la valuation de ses arcs et poursuivre jusqu'à ce que tous les arcs soient valués 0.

Remarque. Soit $\mathcal{F}$ une famille minimale de circuits élémentaires de G recouvrant les arcs de G . Les circuits de $\mathcal{F}$ étant indépendants, la matrice M dont les lignes sont les circuits de $\mathcal{F}$ est extraite d'une matrice de circulation $\mathcal{C}$ de G . M est donc totalement unimodulaire et

$$\rho(M) = \bar{\alpha}(M)$$

$\rho(M) = |\mathcal{F}|$, $\bar{\alpha}(M)$ est le nombre maximal d'arcs qui, deux à deux, ne sont pas sur un même circuit de $\mathcal{F}$. C'est aussi le nombre maximal de 1 du flot positif minimal somme des circuits de $\mathcal{F}$ et qui valuent des arcs non sur un même circuit de $\mathcal{F}$.

Ceci est à fortiori vrai si $\mathcal{F}$ est optimale. Soit $\mathcal{F}_0$ optimale et M_0 la matrice correspondante. On a de plus :

$$\rho(M_0) = \rho(\mathcal{C})$$

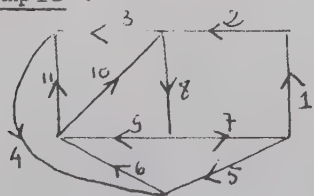
$$\text{d'où} \quad \bar{\alpha}(M_0) = \bar{\alpha}(\mathcal{C})$$

VI.2. Application aux graphes fccm.

Dans un graphe fccm, il n'existe qu'une seule famille $\mathcal{F}$ minimale : l'ensemble de tous les circuits élémentaires.

L'ensemble des arcs valués 1 après l'étape 3 contient le co-arbre associé à l'arbre de circulation H cherché.

Exemple :



	arcs										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
flots				1		1		1	1	1	1
	1	1		1			1	2	1	1	1
	1	1		1	1	2	2	3	1	2	1
	1	1	1	2	1	3	2	3	1	3	1

arcs de H : 4, 6, 7, 8, 10, 1 (ou 2)

Cet algorithme permet évidemment de tester si un graphe fortement connexe est fccm.

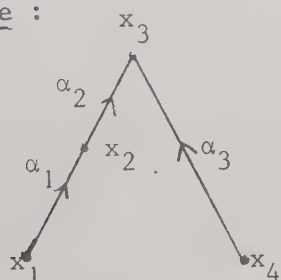
VI.3. Recouvrement des arcs par des cocircuits élémentaires.

VI.3.1. Cas d'un graphe sans circuit quelconque. On peut procéder comme pour les circuits. On peut aussi essayer d'utiliser le rang des sommets.

Considérons un graphe G sans circuit. Soit r la fonction de X dans $\mathbb{N}$ telle que $r(x)$ est le rang du sommet x . Pour tout arc $\alpha_i = (x, y)$ de G , posons $\theta_i = r(y) - r(x)$. Alors $\theta_i > 0$. Le vecteur θ de m coordonnées θ_i est une tension positive non nulle, donc une combinaison linéaire positive de cocircuits élémentaires. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de ces cocircuits élémentaires ;
 $\theta_i = k_i b_i$ ($k_i \in \mathbb{N}$), b_i étant le nombre de cocircuits élémentaires de $\mathcal{C}$ qui passent par l'arc α_i .

Un cocircuit de $\mathcal{C}$ peut être compté plusieurs fois :

Exemple :



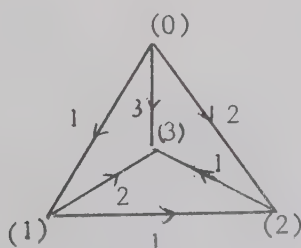
	x_1	x_2	x_3	x_4
$r(x_i)$	0	1	2	0
	α_1	α_2	α_3	
θ_i	1	1	2	

Or, par l'arc α_3 , passe un seul cocircuit élémentaire constitué par l'arc α_3 .

VI.3.2. Application.

Si, par cette méthode, on trouve un vecteur θ dont $n-1$ coordonnées θ_i sont égales à 1, les arcs correspondants n'étant pas 2 à 2 sur un même cocircuit élémentaire, on peut en conclure que G est sans circuit co-minimal et l'ensemble des arcs valués 1 constitue l'arbre associé au coarbre de cocirculation de G .

Exemple :



On a indiqué les $r(x)$ et les θ_i (les premiers entre parenthèses).

Mais il est plus rapide, pour savoir si un graphe G sans circuit est co-minimal, de rechercher le squelette de G . Si le squelette est un arbre, la réponse est positive et on a le coarbre de cocirculation.

CHAPITRE 3

SUPPRESSION DES CIRCUITS

I. PROBLEME

Soit G un p -graphe possédant un ou plusieurs circuits. Nous nous posons le problème suivant : quels sont les ensembles $\Delta_m(G)$ d'arcs de G de cardinal minimal dont la suppression entraîne celle de tous les circuits de G . Notons $\delta(G)$ ce cardinal minimal. Le but de ce chapitre est, essentiellement, de trouver des propriétés de $\delta(G)$ et d'établir des algorithmes permettant de trouver un ensemble $\Delta_m(G)$.

Remarquons d'abord que pour supprimer tous les circuits de G , il est nécessaire et suffisant de supprimer tous les circuits élémentaires de G .

Ce problème de suppression des circuits peut être abordé de deux manières. On peut le traiter comme un problème particulier de recouvrement en travaillant sur les circuits considérés comme ensembles d'arcs, ces ensembles ayant des propriétés spécifiques. On peut l'étudier directement sans utiliser la transition circuits-ensembles.

II. CIRCUITS : ENSEMBLES D'ARCS.

II.1. Introduction.

Soit un graphe $G = (X, U)$ possédant des circuits et $\mathcal{C}$ l'ensemble des circuits élémentaires c_i de G considérés comme ensembles d'arcs. En reprenant les notations de V (Ch. I), la recherche d'un Δ_m de G peut se ramener à la recherche d'un CL optimal dans une matrice A circuits élémentaires arcs de dimension $\xi \times m$ ou encore à l'étude d'un ensemble transversal optimal de l'hypergraphe des circuits élémentaires de G : $H = (V; c_1, c_2, \dots, c_\xi)$ avec $V = \bigcup_{1 \leq i \leq \xi} c_i$.

Soit $\eta(G)$ le nombre maximal de circuits élémentaires de G dis-joints deux à deux.

D'après la proposition V.1 (ch.1), on a :

$$\delta(G) \geq \eta(G)$$

Nous allons chercher les cas où l'égalité est réalisée. On peut déjà énoncer :

Proposition II.1. Si G est fccm, alors $\delta(G) = \eta(G)$.

En effet, dans ce cas A est une matrice de circulation fondamentale de G : elle est totalement unimodulaire. On applique la proposition V.2 (ch.1).

Nous supposons dans la suite que G n'a pas de circuit élémentaire isolé (circuit n'ayant aucun arc commun avec un autre circuit). Remarquons que si G n'a que des circuits isolés, $\delta(G) = \eta(G)$. C'est le cas par exemple des graphes Q -fortement connexes qui sont d'ailleurs fccm.

II.2. Cas des circuits à liaisons simples.

II.2.1. C'est le cas où deux circuits élémentaires quelconques de G ont un arc commun au plus, cet arc n'appartenant à aucun autre

circuit que les deux considérés. Soit G_1 le graphe simple dont les sommets représentent les circuits élémentaires de G . Deux sommets de G_1 , c_i et c_j , sont adjacents si et seulement si les circuits correspondants ont un arc commun. Un Δ_m de G est donné par une couverture optimale de G_1 . Une famille optimale de circuits disjoints deux à deux est donnée par un ensemble intérieurement stable de G_1 .

Conjecture II.1. Soit G un graphe n'ayant que des circuits à liaisons simples. Si $\eta(G) \geq \frac{1}{2} \xi(G)$, $\delta(G) = \eta(G)$.

Il suffit d'appliquer à G_1 la conjecture V.2 (ch.1). $\xi(G) = \xi$ est l'ordre de G_1 , $\alpha(G_1) = \eta(G)$, $c(G_1) = \delta(G)$.

II.2.2. Cas où G est planaire.

Proposition II.2 Si G planaire n'a que des circuits à liaisons simples alors $\delta(G) = \eta(G)$.

Il suffit de démontrer le lemme suivant :

Lemme. G_1 n'a pas de cycle de longueur impaire.

On pourra alors en déduire que G_1 est biparti donc $\alpha(G_1) = c(G_1)$.

Démonstration du lemme.

Supposons que G_1 ait un cycle de longueur impaire.

Alors dans G existent les circuits élémentaires $c_1, c_2, \dots, c_{2n}, c_{2n+1}$ tels que chacun est lié au suivant par un arc et c_{2n+1} lié à c_1 . Appelons $(1,2)$ l'arc qui lie c_1 et c_2 , $(3,4)$ l'arc qui lie c_2 et c_3 , ... $(2p-1, 2p)$ l'arc qui lie c_p et c_{p+1} , $(4n-1, 4n)$ l'arc qui lie c_{2n} et c_{2n+1} , $(4n+1, 4n+2)$ l'arc qui lie c_{2n+1} et c_1 . Par $(1,2)$ ne passent que les circuits c_1 et $c_2, \dots$, Par $(2p-1, 2p)$ ne passent que les circuits c_p et c_{p+1} , etc...

Les circuits $c_1, c_2, \dots, c_{2n+1}$ peuvent s'écrire :

$$c_1 = [\dots, 1, 2, \dots, 4n+1, 4n+2, \dots]$$

$$c_2 = [\dots, 1, 2, \dots, 3, 4, \dots]$$

$$c_3 = [\dots, 3, 4, \dots, 5, 6, \dots]$$

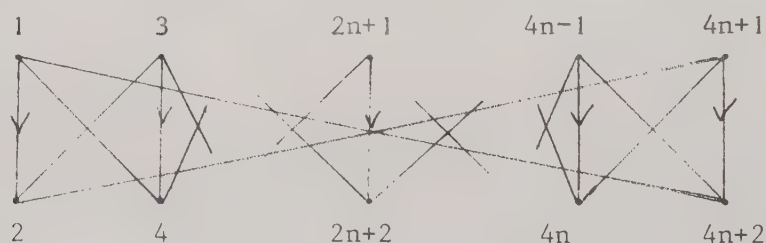
.....

$$c_{n+1} = [\dots, 2n-1, 2n, \dots, 2n+1, 2n+2, \dots]$$

.....

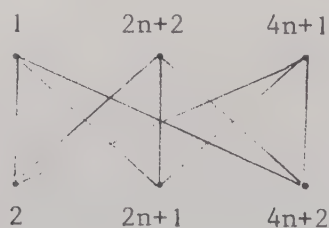
$$c_{2n+1} = [\dots, 4n-1, 4n, \dots, 4n+1, 4n+2, \dots]$$

Les sommets $1, 2, \dots, 4n+2$ sont ainsi liés :



Les traits sans flèches représentent des chaînes.

L'existence des chaînes $]1, 2n+1[$, $]2n+1, 4n+1[$, $]2, 2n+2[$, $]2n+2, 4n+1[$ montre que G contient le sous-graphe suivant :



Donc G n'est pas planaire : ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Par suite G_1 n'a pas de cycle de longueur impaire.

II.3. Etude de l'hypergraphe $H = (V; c_1, c_2, \dots, c_\xi)$

L'ordre de H est $|V| = p$. Si $G = (X, U)$ est fortement connexe $p = |U| = m$, puisque par tout arc de G passe au moins un circuit élémentaire.

Les sommets de H correspondent aux arcs de G qui sont sur un circuit, les arêtes de H aux circuits élémentaires.

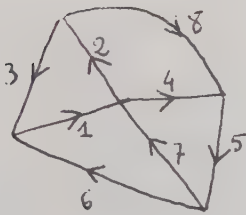
Les c_i étant tous différents, H est simple. Remarquons que H^* peut être multiple (exemple 2 ci-dessous).

Dans le cas des circuits à liaisons simples, H^* est le graphe simple G_1 .

Dans le cas général soit $R(H)$ le graphe représentatif des arêtes de H : $R(H) = (H^*)_2$. On peut dire que $R(H)$ est le graphe simple représentatif des liaisons des circuits élémentaires de G . Dans le cas des circuits à liaisons simples, $R(H) = G_1$.

Exemples

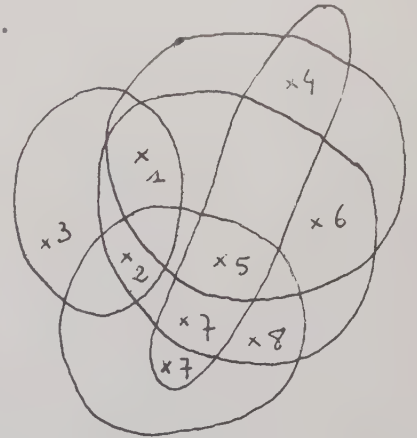
1)



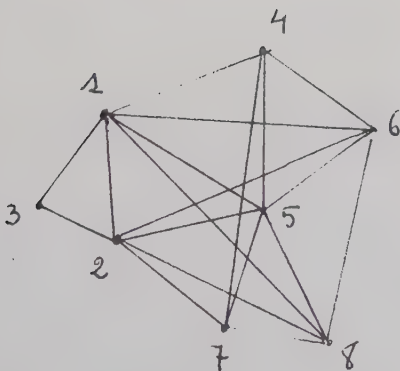
G

	1	2	3	4	5	6	7	8
c_1	1	1	1					
c_2	1			1	1	1		
c_3		1			1		1	1
c_4				1	1	1	1	
c_5	1	1			1	1	1	1

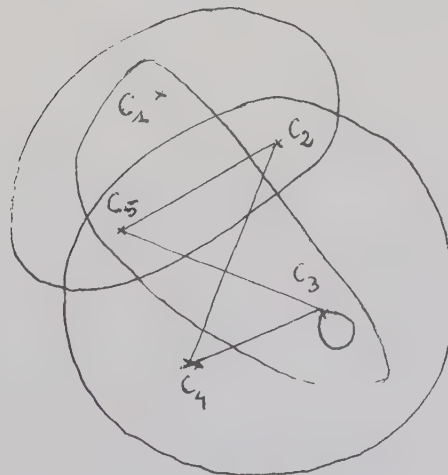
A



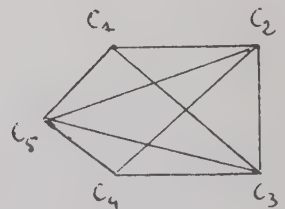
H



$H_{(2)}$

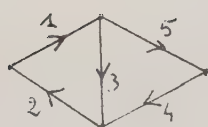


H^*



$$R(H) = H_{(2)}^*$$

2)

 G

	1	2	3	4	5
c_1	1	1	1		
c_2	1	1		1	1

 A  H^*  $R(H)$

THEOREME II.1. H est conforme.

Rappelons la définition : on dit qu'un hypergraphe H est conforme si toute clique maximale de $H_{(2)}$ est une arête maximale de H et réciproquement. [Berge, 6]

Rappelons également : un hypergraphe est conforme si et seulement si toute clique de $H_{(2)}$ est contenue dans une arête de H .

Un hypergraphe H est conforme si et seulement si, étant donné trois arêtes quelconques de $H : E_1, E_2, E_3$ il existe une arête de H qui contienne $(E_1 \cap E_2) \cup (E_2 \cap E_3) \cup (E_3 \cap E_1)$.

Remarquons que toutes les arêtes de l'hypergraphe $H = (V; c_1, \dots, c_\xi)$ sont maximales : en effet, aucune arête n'est contenue dans une autre puisque les arêtes sont des circuits élémentaires.

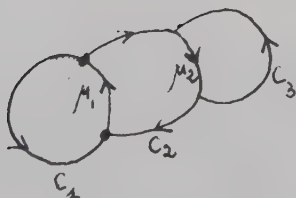
Démonstration du théorème.

Soit trois circuits élémentaires de $G : c_1, c_2, c_3$

$$1) \quad c_1 \cap c_2 = \mu, \quad c_2 \cap c_3 = \emptyset, \quad c_3 \cap c_1 = \emptyset$$

Il existe un circuit élémentaire c_4 de G qui contient μ : c'est c_1 ou c_2 .

$$2) \quad c_1 \cap c_2 = \mu_1, \quad c_2 \cap c_3 = \mu_2, \quad c_3 \cap c_1 = \emptyset$$



Le circuit c_2 contient $\mu_1 \cup \mu_2$

$$3) \quad c_1 \cap c_2 = \mu_1, \quad c_2 \cap c_3 = \mu_2, \quad c_3 \cap c_1 = \mu_3$$



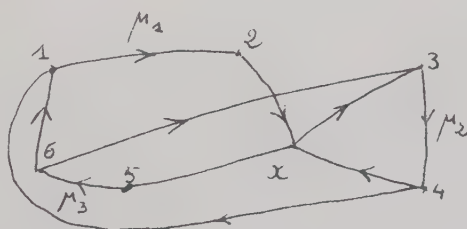
$$\text{soit } \mu_1 = [1, 2], \quad \mu_2 = [3, 4], \quad \mu_3 = [5, 6]$$

le circuit c_4 formé de μ_1 , du chemin $[2, 3]$ sur c_2 , de μ_2 , du chemin $[4, 5]$ sur c_3 , de μ_3 , du chemin $[6, 1]$ sur c_1 contient $\mu_1 \cup \mu_2 \cup \mu_3$. Montrons que c_4 est élémentaire. Les chemins

$$\gamma_1 = [\mu_1, 2, \dots, 3, \mu_2], \quad \gamma_2 = [\mu_2, 4, \dots, 5, \mu_3], \quad \gamma_3 = [\mu_3, 6, \dots, 1, \mu_1]$$

sont élémentaires puisqu'ils sont sur des circuits élémentaires. Pour que c_4 ne soit pas élémentaire, il faut et il suffit que deux d'entre eux au moins ait un sommet commun : par exemple les deux premiers.

Soit x ce sommet commun : il est nécessairement entre 2 et 3 sur γ_1 , entre 4 et 5 sur γ_2 . Les circuits c_1, c_2, c_3 peuvent alors s'écrire $c_1 = [1, \dots, 2, \dots, x, \dots, 5, \dots, 6, \dots, 1]$, $c_2 = [1, \dots, 2, \dots, x, \dots, 3, \dots, 4, \dots, 1]$, $c_3 = [3, \dots, 4, \dots, x, \dots, 5, \dots, 6, \dots, 3]$. Mais alors c_1 et c_2 ont en commun μ_1 et le chemin $[2, x]$, ce qui est contraire à l'hypothèse.



Conséquence du théorème. H^* à la propriété de Helly.

Ce qui se traduit ainsi dans le cas présent :

Soit P une famille d'arcs telle que deux arcs quelconques de P appartiennent à un même circuit élémentaire, alors il existe un circuit élémentaire qui passe par tous les arcs de P .

Proposition II.4. H^* n'est pas conforme, en général.

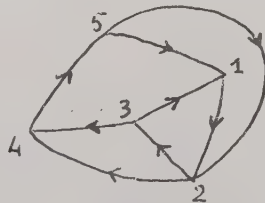
L'exemple 1 nous fournit un contre exemple :

la clique $\{1,2,3\}$ de $H_{(2)}^*$ n'est pas contenue dans une arête de H^* .

On peut obtenir cette proposition en montrant qu'en général H ne vérifie pas la propriété de Helly qui se traduit : soit Q une famille de circuits élémentaires telle que deux circuits élémentaires quelconques de Q ont un arc commun, alors tous les circuits élémentaires de Q ont au moins un arc commun.

Remarque. La propriété ci-dessus est vraie pour les graphes fccm car alors H^* est unimodulaire, donc équilibré, donc conforme. [Berge, 6]

Remarque. On a vu que dans le cas où G était un graphe planaire dont les circuits étaient à liaisons simples, H^* qui était alors un graphe simple G_1 n'avait pas de cycle impair. On peut se demander si dans le cas général où G est planaire, H^* (donc H) est un hypergraphe équilibré. Il n'en est rien comme le montre le contre exemple suivant :



Le cycle impair de H :

$((2,3), [1,2,3,1], (1,2), [1,2,4,5,1], (4,5), [2,3,4,5,2], (2,3))$
n'utilise pas une arête qui contient trois des sommets de ce cycle.

Dans tous les cas où l'hypergraphe H des circuits d'un graphe G sera équilibré on aura :

$$\delta(G) = \eta(G)$$

En effet, dans ce cas, on a : $\tau(H) = v(H)$ [Berge, 6]

Exemple : le graphe ci-dessus dans lequel on a supprimé l'arc $(5,2)$.

II.4. Axiomatique.

On donne ici un système d'axiomes vérifiés par l'ensemble des circuits élémentaires d'un graphe.

Soit E un ensemble fini, $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(E)$.

$$A_1. \quad \forall c \in \mathcal{L}, \forall c' \in \mathcal{L}, c \neq c' : c \not\subset c', c' \not\subset c$$

$$A_2. \quad \forall c \in \mathcal{L}, \forall c' \in \mathcal{L}, [\exists c'' \in \mathcal{L}, c \cap c' \subset c'' \subset c \cup c'] \\ \Rightarrow [\exists c''' \in \mathcal{L}, c''' \subset (c \cup c' - c'') \cup (c \cap c')]$$

$$A_3. \quad \forall c \in \mathcal{L}, \forall c' \in \mathcal{L}, [c \cap c' \neq \emptyset] \Rightarrow [\forall c'' \in \mathcal{L}, c'' \not\subset (c \cup c') - (c \cap c')]$$

Conséquences.

$$1) A_1 \text{ entraîne : } \forall c \in \mathcal{L}, \forall c' \in \mathcal{L}, \forall c'' \in \mathcal{L} : c'' \not\subset c \cap c', \\ c'' \neq c \cup c'.$$

$$2) \text{ Soit } c \in \mathcal{L}, c' \in \mathcal{L}, c \cap c' = \emptyset$$

S'il existe $c'' \in \mathcal{L}$ tel que $c'' \subset c \cup c'$, alors il existe $c''' \in \mathcal{L}$ tel que $c''' \subset c \cup c' - c''$ (d'après A_2).

$$3) \text{ Si } c = \{a, b\} \in \mathcal{L}, c' = \{a, c\} \in \mathcal{L}, \text{ alors } \{b, c\} \notin \mathcal{L}. \text{ (d'après } A_3).$$

Montrons que ces axiomes sont vérifiés si E est l'ensemble des arcs d'un graphe G , $\mathcal{L}$ l'ensemble des circuits élémentaires de G .

a) A_1 est vérifié.

b) Pour vérifier A_2 , utilisons Φ , le module des flots. Le vecteur de Φ correspondant à $(c \cup c' - c'') \cup (c \cap c')$ est $c + c' - c''$, compte tenu de l'hypothèse $c \cap c' \subset c'' \subset c \cup c'$. En effet, examinons tous les cas possibles pour la $i^{\text{ème}}$ composante de ce vecteur.

c_i	c'_i	c''_i	$c \cup c'$	$c \cap c'$	$c \cup c' - c''$	$(c \cup c' - c'') \cap (c \cap c')$	$c + c' - c''$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	(exclu)		
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	(exclu)		
1	1	1	1	1	0	1	1

$c + c' - c''$ est un flot (combinaison linéaire de cycles), positif (composantes égales à 0 ou 1), non nul (sinon, on aurait $c'' = c \cup c'$, ce qui est exclu).

Donc c' est une combinaison linéaire positive de circuits élémentaires c''' .

c) Vérifions A_3 . Soit $c = [x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{q-1}, x_q, x_1]$.
Puisque $c \cap c' \neq \emptyset$, on peut noter

$$c' = [x_1, x_2, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_{r-1}, y_r, x_1]$$

La différence symétrique $c \oplus c'$ a pour éléments

$(x_p, x_{p+1}), \dots, (x_{q-1}, x_q), (x_q, x_1)$ et $(x_p, y_{p+1}), \dots, (y_{r-1}, y_r), (y_r, x_1)$
qui ne peuvent constituer un circuit.

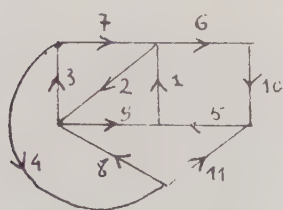
II.5. Algorithmes.

Les méthodes de recherche d'un ensemble transversal optimal peuvent être classées ainsi :

- Programme linéaire à variables bivalentes.
- Algorithme de Lawler [Lawler]
- Algorithme booléen [Maghout, 2]
- Utilisation d'une procédure arborescente [Roy, 3]

Un théorème de Edmonds [Edmonds] sur les arbres alternés (notion généralisant celle des chaînes alternées) permet de reconnaître si un ensemble transversal est optimal.

Une borne inférieure de $\delta(G)$ peut être déterminée à partir de la matrice A circuits élémentaires-arcs en construisant la matrice $\tilde{A}$ de la classe $\mathcal{U}(R,S)$ de A (ch.1,V.3). L'exemple donné correspond aux circuits élémentaires du graphe suivant :



G

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1						1
2	1				1	1				1	
3	1	1							1		
4			1	1				1			
5	1	1				1					

A

On a trouvé $\delta(G) \geq 2$. En fait, ici $\delta(G) = 2$ car $\{1,3\}$ est un CL optimal.

Nous proposons ici une méthode donnant un ensemble transversal. En termes de matrice, nous déterminons un CL par sélection de certaines colonnes. La terminologie utilisée est celle de [Chaty,4]. Cette méthode s'apparente à celle utilisée pour la recherche d'un ensemble extérieurement stable de cardinal minimal [Berge,1]. Pour cette dernière recherche, on commençait par éliminer les colonnes "contenues" dans une colonne de la matrice $A+I$ (A étant la matrice d'adjacence du graphe : ch.1,V.2.3), puis on choisissait une colonne rencontrant une ligne en un seul 1. Si une telle colonne n'existait pas, on choisissait une colonne arbitraire. On supprimait la colonne choisie et les lignes qu'elle rencontrait, etc... On pouvait comparer les solutions provenant des suites de choix. Cette méthode avait été affinée par P.Bertier [Durand]. Ici, nous considérons des rangées maximales (resp. minimales) c'est-à-dire contenant le plus grand (resp. petit) nombre de 1.

1 - Recenser l'ensemble L_m des lignes minimales de la matrice A .

- 2 - Pour chaque ligne l de L_m , recenser l'ensemble $C_{l,M}$ des colonnes maximales qui rencontrent l .
- Prendre la réunion $C_M = \bigcup_{l \in L_m} C_{l,M}$
- Si C_M constitue A , prendre pour C_M une colonne quelconque.
- 3 - Supprimer toutes les lignes qui rencontrent C_M . Supprimer C_M .
S'il reste encore des lignes, aller en 1.
Sinon, aller en 4.
- 4 - Prendre la matrice $\mathcal{C}$ constituée par les colonnes de tous les C_M .
La comparer à celle obtenue précédemment.
Si elle est différente, aller en 1.
Sinon, on retient le CL constitué par $\mathcal{C}$.

Cet algorithme ne donne pas nécessairement un CL optimal mais apporte une "bonne" solution en reposant sur le fait que les lignes minimales sont représentées par moins de colonnes que les autres et que les colonnes maximales représentent plus de lignes que les autres. D'autre part, on retarde le plus possible les choix définitifs.

III. ETUDE DIRECTE.

III.1. Ensembles Δ_m et coupes minimales.

Etant donné un graphe $G = (X, U)$, introduisons les notations suivantes :

Si G a des circuits, $\Pi(G) = \{V \mid G_V \text{ est sans circuit}\}$. Les éléments de $\Pi(G)$ seront parfois notés Δ .

Soit $\Pi_m(G)$ l'ensemble des V de $\Pi(G)$, de cardinal minimal. Les éléments de $\Pi_m(G)$ sont des ensembles Δ_m de G .

Si G est fortement connexe, soit $\Psi(G)$ l'ensemble des coupes de G . Nous noterons $\Psi_m(G)$ l'ensemble des coupes minimales. Si $W \in \Psi_m(G)$, $|W| = r(G)$, nombre minimal d'arcs qu'il faut supprimer

dans G pour rompre la forte connexité.

Nous avons les propositions suivantes :

Proposition III.1. [Roy, 2] Etant donné un graphe G avec circuits et $G^1, G^2, \dots, G^p$ les sous-graphes de G engendrés par les composantes fortement connexes de G ,

$V \in \Pi_m(G)$ si et seulement si $V = \bigcup_{1 \leq i \leq p} V_i$ avec $V_i \in \Pi_m(G^i)$,
 $1 \leq i \leq p$, donc $\delta(G) = \sum_{i=1}^p \delta(G^i)$.

En effet, puisqu'il n'y a pas de circuit dans G passant dans G^i et G^j , $i \neq j$, pour supprimer les circuits de G , il faut les supprimer dans chaque G^i et cela suffit. Comme $V_i \in \Pi(G^i)$ et $V_j \in \Pi(G^j)$ ($i \neq j$) entraîne $V_i \cap V_j = \emptyset$, $V = \bigcup_{1 \leq i \leq p} V_i$ ($V_i \in \Pi(G^i), 1 \leq i \leq p$) sera de cardinal minimal si et seulement si $V_i \in \Pi_m(G^i)$, $1 \leq i \leq p$.

Proposition III.2. Etant donné un graphe G avec circuits, si $V \in \Pi_m(G)$ et $u \in V$, alors $V - \{u\} \in \Pi_m(G_u)$.

Puisque la suppression de V dans G entraîne la suppression des circuits de G et que $u \in V$, la suppression de $V - \{u\}$ dans G_u entraîne la suppression des circuits de G_u . S'il existait V' dans G_u tel que $V' \in \Pi(G_u)$ et $|V'| < |V - \{u\}|$ alors $V'' = V' \cup \{u\}$ appartiendrait à $\Pi(G)$ (tout circuit de G qui n'est pas dans G_u passe par u) et on aurait $|V''| < |V|$. V ne serait pas de cardinal minimal.

Proposition III.3. Soit un graphe G fortement connexe tel que $r(G) \geq 2$, si $W \in \Psi_m(G)$ et $u \in W$, alors $W - \{u\} \in \Pi_m(G_u)$.

G_u est fortement connexe sinon u serait non supprimable et on aurait $r(G) = 1$.

W peut s'écrire $\omega_G^+(A)$, $A \subset X$. $W - \{u\} = \omega_G^+(A)$ est une coupe de G_u . C'est une coupe minimale de G_u sinon W ne serait pas une coupe minimale de G .

La proposition III.2 nous montre que si l'on recherche un Δ_m d'un graphe G quelconque et que l'on sait qu'un arc u de G appartient à un Δ_m de G , on peut le sélectionner et rechercher un Δ_m de G_u , etc ...

D'après la proposition III.1, l'étude d'un Δ_m d'un graphe G quelconque se ramène à l'étude d'un Δ_m pour chaque composante fortement connexe. On peut donc considérer que le graphe G donné est fortement connexe et chercher les relations qui peuvent exister entre $\delta(G)$ et les constantes qui s'attachent à la forte connexité, en particulier $r(G)$.

Nous avons :

Proposition III.4. Si G est fortement connexe : $\delta(G) \geq r(G)$.

Etant donnés 2 sommets x et y de G , soit r_{xy} le nombre minimum d'arcs qui couvrent les chemins $[x,y]$ c'est-à-dire dont la suppression empêche d'aller de x en y . Le nombre minimum d'arcs nécessaires pour rompre les circuits $[x,y,x]$ sera $\min \{r_{xy}, r_{yx}\}$. En effet, il faut rompre ou bien les chemins $[x,y]$, ou bien les chemins $[y,x]$. On a $\delta(G) \geq \min \{r_{xy}, r_{yx}\} \geq r(G)$.

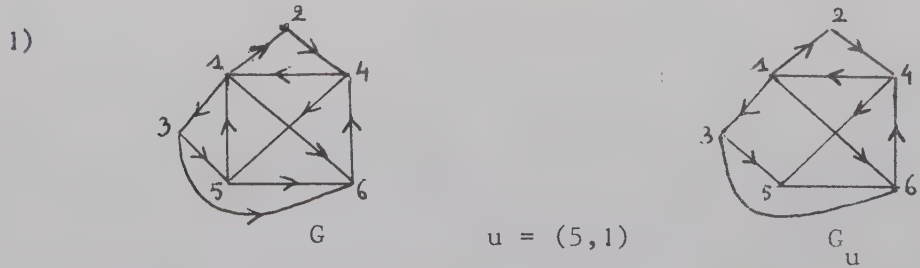
Existe-t-il des relations plus fines entre $\delta(G)$ et $r(G)$? Roy a proposé les conjectures suivantes [Roy, 2] :

Etant donné G et G_u fortement connexes :

- 1) Si $\delta(G_u) = \delta(G) - 1$, alors $r(G_u) = r(G) - 1$

2) Si $r(G_u) = r(G) - 1$, alors $\delta(G_u) = \delta(G) - 1$.

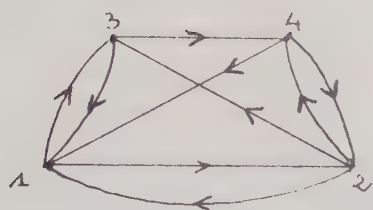
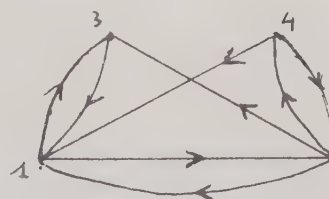
Ces conjectures sont fausses comme le montrent les contre-exemples suivants :



Pour G : $\{(4,1), (5,1), (6,4)\} \in \Pi_m(G)$, $\delta(G) = 3$
 $(1,3)$ n'est pas supprimable : $r(G) = 1$.

Pour G_u : $\{(4,1), (6,4)\} \in \Pi_m(G_u)$, $\delta(G_u) = 2$
 $r(G_u) = 1$.

2)

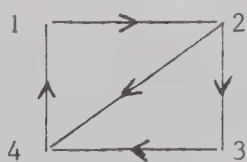
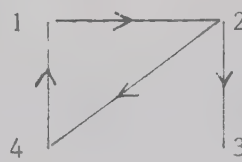
 G $u = (3,4)$  G_u

Pour G : $\{(1,3), (1,2), (4,2)\} \in \Pi_m(G)$, $\delta(G) = 3$
 $\{(1,2), (3,4)\} \in \Psi_m(G)$, $r(G) = 2$

Pour G_u : $\{(1,3), (1,2), (4,2)\} \in \Pi_m(G_u)$, $\delta(G_u) = 3$
 $\{(1,2)\} \in \Psi_m(G_u)$, $r(G_u) = 1$.

La deuxième conjecture peut se traduire : tout arc d'une coupe minimale d'un graphe G fortement connexe tel que $r(G) \geq 2$ appartient à un Δ_m de G .

Cette propriété n'est pas non plus vérifiée pour les graphes fortement connexes G tels que $r(G) = 1$ comme le montre le contre-exemple suivant :

 G $u = (3,4)$  G_u

$\{(1,2)\} \in \Pi_m(G)$, $\delta(G) = 1$
 $\{(3,4)\} \in \Psi_m(G)$, $r(G) = 1$.

$\{(1,2)\} \in \Pi_m(G_u)$, $\delta(G_u) = 1$

Supposons que cette propriété ait été vraie pour tout graphe fortement connexe G . Alors, et en vertu de la Proposition III.3, tous les arcs d'une coupe minimale de G auraient appartenu à un Δ_m de G . Il en serait résulté un algorithme simple pour la recherche d'un Δ_m d'un graphe quelconque.

Il semble cependant qu'une corrélation existe entre éléments de $\Pi_m(G)$ et de $\Psi_m(G)$ que nous traduisons par la conjecture suivante, corrélation qui serait exploitable comme nous le montrons ensuite.

Conjecture III.1. Soit G un graphe fortement connexe.

Pour tout $V \in \Pi_m(G)$, il existe $W \in \Psi_m(G)$ telle que $V \cap W \neq \emptyset$. Autrement dit, il existe un arc d'une coupe minimale qui appartient à un Δ_m de G .

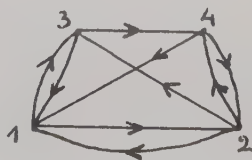
Méthode de recherche d'un Δ_m résultant de la conjecture précédente.

Supposons le graphe G donné fortement connexe.

Choisir un arc u d'une coupe minimale de G . Si G_u est fortement connexe, choisir un arc d'une coupe minimale de G_u . Si G_u n'est pas fortement connexe, considérer chaque composante fortement connexe.

Il faut envisager tous les choix à chaque étape. On a simplement réduit l'éventail des possibilités du choix des arcs pour la construction d'un Δ_m .

Exemple 1 :



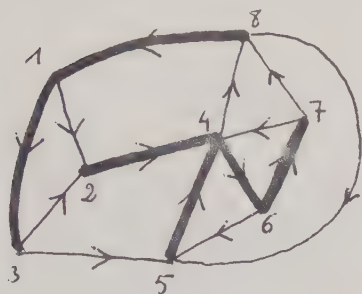
On indique ci-dessous un extrait de la procédure.

coupes min.	u	coupes minimales	u	c.m.	u	cardinalité de l'ensemble Δ obtenu
(1,3) (2,3)	→ (1,3)	→ (2,3)	→ (2,3)	→ (2,4)	→ (2,4)	4
				→ (1,2)	→ (1,2)	4
		→ (1,2)	→ (1,2)			3
	→ (2,3)	→ (1,3)	→ (1,3)			4

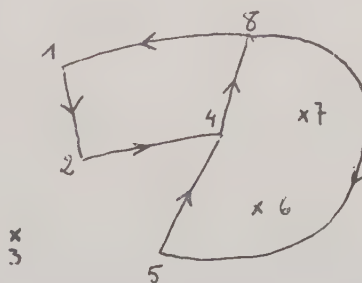
On remarque que le choix de $(1,3)$ dans la coupe minimale $\{(1,3), (2,3)\}$ conduit à un $\Delta_m(G) : \{(1,3), (1,2), (4,2)\}$, alors que celui de $(2,3)$ donne un ensemble $V \in \Pi(G)$, non optimal.

Exemple 2. $r(G) = 1$

Les arcs non supprimables sont épaissis dans G .



G



Composantes fortement connexes de $G_{(4,6)}$.

Le choix de $(4,6)$ conduit à trouver un $\Delta_m : \{(4,6), (4,8)\}$

Remarque. La recherche peut être facilitée si l'on considère les arcs de coupes minimales par chacun desquels passent le maximum de circuits (exemple 2, choix de $(4,8)$) mais ce n'est pas un critère suffisant (exemple 2, choix de $(4,6)$: par $(4,6)$ il passe 5 circuits élémentaires, par $(8,1)$: 5).

Cette méthode n'est pas nécessaire pour obtenir un Δ_m . C'est-à-dire qu'il n'est pas toujours nécessaire de choisir un arc d'une coupe minimale pour obtenir un Δ_m . Si cela était, on aurait : $r(G_u) = r(G) \Rightarrow \delta(G_u) = \delta(G)$. Or ceci est équivalent à la conjecture 1 de Roy.

Mais d'après la conjecture III.1 elle serait suffisante. Voici un exemple où en ne l'appliquant pas, on ne peut obtenir un Δ_m (exemple 1) :

L'arc $(2,1)$ n'appartient à aucune coupe minimale et $\delta(G_{(2,1)})=3$.

III.2. Intérêt de l'opération Ψ .

Soit G un graphe quelconque et $G' = \Psi(G)$.

D'après la proposition IV.3. (ch.1), x et y étant deux sommets distincts de G et de G' , il existe une bijection f de l'ensemble des circuits élémentaires $[x,y,x]_{G'}$ de G' sur l'ensemble des circuits élémentaires $[x,y,x]_G$ de G et tout $[x,y,x]_{G'}$ passe par les arcs de $[x,y,x]_G$ qui sont dans G' .

Il est facile de supprimer les circuits élémentaires de G qui ne sont pas les images par f de circuits de G' : ce sont des circuits de sous-graphes Q -fortement connexes de G . D'autre part si un arc u' de G' est le résultat de la contraction d'une branche ou d'une pseudo-branche de chemin μ dans G , la suppression d'un arc u quelconque de μ entraînera la suppression des circuits élémentaires de G images par f des circuits élémentaires de G' passant par u' ; si u' appartient à un $\Delta_m(G')$, u appartient à un $\Delta_m(G)$.

On a :

Proposition III.5. $\delta(G) - \delta(G') = \xi(G) - \xi(G') = v(G) - v(G')$

Conséquence :

Un graphe G étant donné, la recherche d'un $\Delta_m(G)$ peut s'effectuer sur les graphes déduits de ses composantes fortement connexes par l'opération Ψ . L'étude de la suppression des circuits d'un graphe se ramène donc au cas où le graphe est fortement connexe, sans bouclement transmetteur.

On peut évidemment supposer de plus que G est inarticulé.

III.3. Relations optimales.

Dans cette partie, le graphe G considéré est un 1-graphe.

III.3.1. Introduction et rappels - Notations.

La recherche de $\delta(G)$ revient à celle d'un ordre total $\mathcal{O}$ sur les sommets de G , cet ordre devant être compatible avec l'ordre

partiel défini par leur rang dans le graphe sans circuit obtenu après suppression de certains arcs. $\delta(G)$ s'interprète comme le nombre minimal d'arcs dont le sens d'orientation n'est pas conforme à l'ordre $\mathcal{O}$. La matrice d'adjacence associée à G conformément à $\mathcal{O}$ comporte $\delta(G)$ 1 en dessous de la diagonale. [Picard, 1 ; Roy, 2]

On peut aussi présenter le problème de la manière suivante : Soit R_G la relation binaire dont G est le graphe. Considérons une relation d'ordre total R (notée aussi $\leq_R$) sur X et soit $v(R)$ le nombre d'arcs (x_i, x_j) de G tels que $x_j \leq_R x_i$. $v(R)$ est donc le nombre d'arcs de G qu'il faut inverser pour rendre R_G compatible avec R . On a :

$$\delta(G) = \min_R v(R) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Russel Remage et Thompson} \\ \text{Grinberg et Dambit} \end{array} \right]$$

Soit R_0 une relation R qui rend minimal $v(R)$. Nous la qualifierons d'optimale. R_0 est à distance minimale de R_G au sens de [Barbut]

Soit X^1 un sous-ensemble de X . Notons G^1 le sous-graphe de G engendré par X^1 et R^1 la restriction de R à X^1 . Soit $d(X^1, X^2)$ le nombre d'arcs de G ayant leur origine dans X^1 et leur extrémité dans X^2 . Si $X^1 = \{x_1\}$, on notera $d(x_1, X^2)$.

(X^1, X^2) sera une partition ordonnée par R de X si et seulement si $\{X^1, X^2\}$ est une partition de X et :

$$X^1 \leq_R X^2 \quad \text{c'est-à-dire : } \forall x^1 \in X^1, \forall x^2 \in X^2, x^1 \leq_R x^2.$$

Plus généralement, $(X^1, X^2, \dots, X^r)$ désignera une partition ordonnée par R de X .

Par commodité, mais abus de notation, R , relation d'ordre total sur X désignera aussi la suite des sommets de X ordonnés par R .

III.3.2. Propriétés.

Lemme 1 - Si (X^1, X^2) est une partition ordonnée par R de X :

$$v(R) = v(R^1) + d(X^2, X^1) + v(R^2)$$

En effet, $v(R)$ est la somme de trois nombres :

a) nombre d'arcs (x_i^1, x_j^1) de G , $x_i^1 \in X^1$, $x_j^1 \in X^1$, tels que $x_i^1 \leq_R x_j^1$; c'est $v(R^1)$.

b) nombre d'arcs (x_i^2, x_j^2) de G , $x_i^2 \in X^2$, $x_j^2 \in X^2$, tels que $x_i^2 \leq_R x_j^2$; c'est $v(R^2)$.

c) nombre d'arcs (x_k^2, x_l^1) de G , $x_k^2 \in X^2$, $x_l^1 \in X^1$ (pour tous ces arcs, on a : $x_l^1 \leq_R x_k^2$) ; c'est $d(X^2, X^1)$.

Pour les arcs (x_s^1, x_t^2) de G , on n'a pas : $x_t^2 \leq_R x_s^1$.

Lemme 2 - Si $(X^1, X^2, \dots, X^r)$ est une partition ordonnée par R de X :

$$v(R) = \sum_{i=1}^r v(R^i) + \sum_{1 \leq i < j \leq r} d(X^j, X^i)$$

Cette relation est vraie pour $r=2$ (Lemme 1).

Supposons qu'elle soit vraie pour $r = \rho$, $\rho \geq 2$.

Soit $(X^1, X^2, \dots, X^\rho, X^{\rho+1})$. Posons $X_1^\rho = X^\rho \cup X^{\rho+1}$.

Considérons $(X^1, X^2, \dots, X_1^\rho)$. D'après l'hypothèse de récurrence :

$$v(R) = \sum_{i=1}^{\rho-1} v(R^i) + \sum_{1 \leq i < j \leq \rho-1} d(X^j, X^i) + \sum_{i=1}^{\rho-1} d(X_1^\rho, X^i) + v(R_1^\rho)$$

D'après le lemme 1 :

$$v(R_1^\rho) = v(R^\rho) + d(X^{\rho+1}, X^\rho) + v(R^{\rho+1})$$

$$\text{d'où} \quad v(R) = \sum_{i=1}^{\rho+1} v(R^i) + \sum_{1 \leq i < j \leq \rho+1} d(X^j, X^i)$$

car $d(X_1^\rho, X^i) = d(X^\rho, X^i) + d(X^{\rho+1}, X^i)$, $\forall i \in \{1, \dots, \rho-1\}$

Remarque : Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $X^i = \{x_i\}$ on a :

$$v(R) = \sum_{i=1}^n v(R^i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} d(x_j, x_i)$$

or, $v(R) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} d(x_j, x_i)$ par définition.

On peut donc poser, en notant ici $v(R^i) = v(x_i)$:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, v(x_i) = 0.$$

Lemme 3 - Soit R_o une relation R optimale. Alors $R_o^1, R_o^2, \dots, R_o^r$ sont optimales séparément pour les graphes $G^1, G^2, \dots, G^r$ engendrés respectivement par $X^1, X^2, \dots, X^r$ d'une partition $(X^1, X^2, \dots, X^r)$.

Soit R^i une relation d'ordre quelconque sur X^i , $1 \leq i \leq r$.

Soit R la relation induite sur X par $R_o^1, R_o^2, \dots, R_o^{i-1}, R^i, R_o^{i+1}, \dots, R_o^r$

$$v(R_o) \leq v(R)$$

Mais d'après le lemme 2 :

$$v(R_o) = v(R_o^1) + v(R_o^2) + \dots + v(R_o^r) + \sum_{1 \leq i < j \leq r} d(X^j, X^i)$$

$$v(R) = v(R_o^1) + \dots + v(R_o^{i-1}) + v(R^i) + v(R_o^{i+1}) + \dots + v(R_o^r) + \sum_{1 \leq i < j \leq r} d(X^j, X^i)$$

$$\text{d'où} \quad v(R_o^i) \leq v(R^i)$$

III.3.3. Conditions nécessaires d'optimalité.

Soit une relation $R = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$. Notons X_i^j l'ensemble des sommets x tels que $x_i \leq_R x \leq_R x_j$, c'est-à-dire

$$X_i^j = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j\}$$

THEOREME III.1.

Si R est une relation optimale alors :

$$\begin{array}{l} x_i \leq_R x_j \text{ implique } d(X_i^j, x_i) \leq d(x_i, X_i^j) \\ i < j \end{array} \quad (1)$$

$$d(x_j, X_i^j) \leq d(X_i^j, x_j) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & d(X_{i+1}^{j-1}, x_i) + d(x_j, x_i) + d(x_j, X_{i+1}^{j-1}) \\ & \leq d(X_{i+1}^{j-1}, x_j) + d(x_i, x_j) + d(x_i, X_{i+1}^{j-1}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{array}{l} x_i < x_j \text{ implique } d(X_i^{j-1}, x_i) < d(x_i, X_i^{j-1}) \\ i+1 < j \end{array} \quad (4)$$

$$d(x_j, X_{i+1}^j) < d(X_{i+1}^j, x_j) \quad (5)$$

Soit $R = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$

Puisque R est optimale, d'après le lemme 3, la relation $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j)$ est optimale. Donc

$$a) \ v(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j) \leq v(x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_i)$$

$$\text{or } v(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j) = v(x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j) + d(X_{i+1}^j, x_i)$$

$$v(x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_i) = v(x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j) + d(x_i, X_{i+1}^j)$$

$$\text{donc } d(X_{i+1}^j, x_i) \leq d(x_i, X_{i+1}^j)$$

G étant supposé sans boucle, $d(x_i, x_i) = 0$ et :

$$d(X_{i+1}^j, x_i) = d(X_i^j, x_i) + d(x_i, x_i) = d(X_i^j, x_i)$$

$$\text{De même } d(x_i, X_{i+1}^j) = d(x_i, X_i^j).$$

On obtient (1).

$$b) \quad v(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j) \leq v(x_j, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1})$$

$$\text{donc} \quad d(x_j, X_i^{j-1}) \leq d(X_i^{j-1}, x_j)$$

On obtient (2).

$$c) \quad v(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j) \leq v(x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i)$$

$$\text{or} \quad v(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j) = v(x_{i+1}, \dots, x_{j-1}) + d(X_{i+1}^{j-1}, x_i) + d(x_j, x_i) + d(x_j, X_{i+1}^{j-1})$$

$$v(x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i) = v(x_{i+1}, \dots, x_{j-1}) + d(X_{i+1}^j, x_j) + d(x_i, x_j) + d(x_i, X_{i+1}^{j-1})$$

On obtient (3).

d) la relation $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1})$ est optimale :

$$v(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}) \leq v(x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i)$$

$$\text{donc} \quad d(X_{i+1}^{j-1}, x_i) \leq d(x_i, X_{i+1}^{j-1}) \quad \text{d'où} \quad (4)$$

e) la relation $(x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j)$ est optimale :

$$v(x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j) \leq v(x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1})$$

$$\text{donc} \quad d(x_j, X_{i+1}^{j-1}) \leq d(X_{i+1}^{j-1}, x_j) \quad \text{d'où} \quad (5).$$

Remarques

i) (1) (2) n'implique pas (3). En effet :

$$(3) \text{ peut s'écrire : } d(X_i^{j-1}, x_i) + d(x_j, X_i^j) \leq d(X_{i+1}^j, x_j) + d(x_i, X_i^j)$$

$$\text{ou encore : } d(X_i^j, x_i) + d(x_j, X_i^j) + d(x_i, x_j) \leq d(X_i^j, x_j) + d(x_i, X_i^j) + d(x_j, x_i) \quad (3)'$$

Or (1) $\wedge$ (2) implique seulement :

$$d(X_i^j, x_i) + d(x_j, X_i^j) \leq d(x_i, X_i^j) + d(X_i^j, x_j).$$

ii) (1) implique (4) . En effet, en posant $j' = j+1$ dans (1), on a :

$$d(X_i^{j'-1}, x_i) \leq d(x_i, X_i^{j'-1}) \quad \text{avec} \quad i+1 < j'$$

D'autre part, (1) implique :

$$d(X_i^{j-1}, x_i) + d(x_j, x_i) \leq d(x_i, X_i^{j-1}) + d(x_i, x_j).$$

iii) (2) implique (5) . En effet, en posant $i' = i-1$ dans (2), on a :

$$d(x_j, X_{i'+1}^j) \leq d(X_{i'+1}^j, x_j) \quad \text{avec} \quad i'+1 < j.$$

D'autre part, (2) implique :

$$d(x_j, X_{i+1}^j) + d(x_j, x_i) \leq d(X_{i+1}^j, x_j) + d(x_i, x_j).$$

Notons x_i / x_j lorsque $x_i \leq_R x_j$ et qu'il n'existe pas de sommet dans R entre x_i et x_j .

Corollaire 1. Si R est optimale, alors

$$x_i / x_j \text{ implique } d(x_j, x_i) \leq d(x_i, x_j).$$

Il suffit de faire $X_{i+1}^{j-1} = \emptyset$ dans (3).

Corollaire 2. Si R est optimale, alors

$$a) \quad d^-(x_1) \leq d^+(x_1) \quad (6)$$

$$b) \quad d^+(x_n) \leq d^-(x_n) \quad (7)$$

$$c) \quad d^-(x_1) + d^+(x_n) + d(x_1, x_n) \leq d^-(x_n) + d^+(x_1) + d(x_n, x_1) \quad (8)$$

Il suffit de faire $i = 1$, $j = n$ dans (1), (2), (3)' .

III.3.4. Algorithme de recherche d'une relation optimale R_0 .

Le principe de cet algorithme est d'éliminer les relations R qui ne satisfont pas à la condition nécessaire.

On commence par éliminer les couples (x_i, x_j) tels que x_i ne peut être premier dans une relation optimale (ce sont les x_i qui ne vérifient pas (6)), x_j ne peut être dernier (ne vérifiant pas (7)) et x_i et x_j ne peuvent être respectivement premier et dernier (ceux ne vérifiant pas (8)).

On considère, parmi les couples (x_i, x_j) non éliminés un couple que l'on appelle (x_1, x_n) . On le complète successivement par $x_2, x_{n-1}, x_3, \dots$ de telle sorte que les relations successives

$$\begin{array}{c} x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \\ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n-1} \ x_n \\ x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_{n-1} \ x_n \ , \text{ etc } \dots \end{array}$$

(les points de suspension indiquent les sommets non choisis à cette étape)

vérifient les conditions (1) (2) (3).

Si, à une étape, il n'y a plus de sommets vérifiant les conditions nécessaires, on change le dernier sommet choisi si c'est possible; sinon, on modifie le choix de l'avant-dernier, etc...

On obtient ainsi toutes les relations R vérifiant les conditions nécessaires. On choisit celles pour lesquelles $v(R)$ est minimal.

CHAPITRE 4

TOURNOIS

Nous groupons dans ce chapitre des résultats concernant les tournois : suppression des circuits, tournois fortement connexes c-minimaux.

I. SUPPRESSION DES CIRCUITS.

I.1. Relations optimales.

Nous commençons par examiner, en reprenant le vocabulaire et les notations du chapitre 3 , § III.3 , ce que deviennent les conditions nécessaires d'optimalité dans le cas particulier des tournois.

Remarquons d'abord que dans un tournoi :

$$\text{ou bien} \quad d(x_i, x_j) = 1 \quad , \quad d(x_j, x_i) = 0$$

$$\text{ou bien} \quad d(x_i, x_j) = 0 \quad , \quad d(x_j, x_i) = 1 .$$

D'autre part ; x étant un sommet et Y un sous-ensemble de X ;
 $x \notin Y$:

$$d(x, Y) + d(Y, x) = |Y|$$

THEOREME I.1.

Si $R = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$ est optimale, alors :

$$a) \quad d(x_i, x_i^j) \geq \frac{j-i}{2} \geq d(x_j, x_i^j)$$

$$b) \quad d(x_i^j, x_i) \leq \frac{j-i}{2} \leq d(x_i^j, x_j)$$

$$c) \quad d(x_i, x_i^j) - d(x_j, x_i^j) \geq \frac{d(x_i, x_j) - d(x_j, x_i)}{2}$$

$$d) \quad d(x_i^j, x_i) - d(x_i^j, x_j) \geq \frac{d(x_i, x_j) - d(x_j, x_i)}{2}$$

Démonstration . D'après le théorème III.1 (chapitre 3)

$$d(X_{i+1}^j, x_i) \leq d(x_i, X_{i+1}^j)$$

$$\text{Mais } d(X_{i+1}^j, x_i) = |X_{i+1}^j| - d(x_i, X_{i+1}^j) = j - i - d(x_i, X_{i+1}^j)$$

$$\text{donc } d(x_i, X_{i+1}^j) \geq \frac{j-i}{2}$$

$$\text{et } d(X_{i+1}^j, x_i) \leq \frac{j-i}{2}$$

De même, d'après ce théorème :

$$d(x_j, X_i^{j-1}) \leq d(X_i^{j-1}, x_j)$$

$$\text{et comme } |X_i^{j-1}| = j-i$$

$$\text{on a } d(x_j, X_i^{j-1}) \leq \frac{j-i}{2}$$

$$\text{et } d(X_i^{j-1}, x_j) \geq \frac{j-i}{2}$$

$$\text{Puisque } d(x_i, X_{i+1}^j) = d(x_i, X_i^j) , d(X_{i+1}^j, x_i) = d(X_i^j, x_i) ,$$

$$d(x_j, X_i^{j-1}) = d(x_j, X_i^j) , d(X_i^{j-1}, x_j) = d(X_i^j, x_j) , \text{ on a les relations}$$

a et b annoncées.

La relation (3) du théorème III.1 (ch.3) s'écrit pour les tournois :

$$2d(x_i, X_{i+1}^{j-1}) + d(x_i, x_j) \geq 2d(x_j, X_{i+1}^{j-1}) + d(x_j, x_i) \quad (3)''$$

$$\text{En écrivant } d(x_i, X_{i+1}^{j-1}) = d(x_i, X_i^j) - d(x_i, x_j)$$

$$d(x_j, X_{i+1}^{j-1}) = d(x_j, X_i^j) - d(x_j, x_i) ,$$

on tire de (3)'' la relation (c).

On obtiendrait de même la relation (d) à partir de :

$$-2d(X_{i+1}^{j-1}, x_i) + d(x_i, x_j) \geq -2d(X_{i+1}^{j-1}, x_j) + d(x_j, x_i) \quad (3)'''$$

Remarque. Les relations (c) et (d) deviennent dans le cas où $d(x_i, x_j) = 1$:

$$d(x_i, X_i^j) - d(x_j, X_i^j) \geq 1$$

$$d(X_i^j, x_j) - d(X_i^j, x_i) \geq 1$$

Corollaire 1. Si $R = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$ est optimale, alors la suite des sommets ordonnés par R constituent un chemin hamiltonien.

En effet:

$$x_i / x_j \text{ sur } R \text{ implique } d(x_j, x_i) \leq d(x_i, x_j)$$

donc $d(x_i, x_j) = 1$.

Corollaire 2. Si $R = (x_1, \dots, x_n)$ est optimale alors :

$$d^+(x_1) \geq \frac{n-1}{2} \geq d^+(x_n)$$

$$d^-(x_1) \leq \frac{n-1}{2} \leq d^-(x_n)$$

$$d^+(x_1) - d^+(x_n) \geq \frac{d(x_1, x_n) - d(x_n, x_1)}{2}$$

$$d^-(x_n) - d^-(x_1) \geq \frac{d(x_1, x_n) - d(x_n, x_1)}{2}$$

I.2. Applications.

I.2.1. Règles de Slater.

Slater a proposé des règles pour la recherche d'une relation optimale [Slater] . Ces règles tombent en défaut pour $n \geq 10$ [Remage Russell et Thompson] . Mais il est intéressant de

constater que parmi les règles proposées par Slater l'une donne des relations qui, bien que non optimales dans le cas général, satisfont à certaines conditions nécessaires énoncées ici.

Règles de Slater. (exprimées à l'aide de nos notations).

1) Construire la matrice d'adjacence du graphe de telle sorte que le vecteur $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ et le vecteur $(s_1, \dots, s_n)$ soient monotones décroissants, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} r_1 &\geq r_2 \geq \dots \geq r_n \\ s_1 &\geq s_2 \geq \dots \geq s_n \end{aligned} \quad (\text{ch.1, V.3})$$

2) Les lignes et les colonnes de la matrice étant numérotées dans l'ordre croissant (l'indice i du sommet x_i changera en cours de procédure) :

- si pour une ligne i , i minimal, il existe un j , $j > i$ et j minimal, tel que $d(x_i, x_j) < \frac{j-i}{2}$, permuter les lignes i et j et les colonnes i et j .

- si pour une colonne j , j minimal, il existe un i , $i < j$ et i minimal, tel que $d(x_i, x_j) < \frac{j-i}{2}$, permuter les colonnes i et j et les lignes i et j .

Appliquer la règle 2 tant que c'est possible.

Commentaires. La 2ème règle n'est plus applicable si pour tout i et pour tout j : $d(x_i, x_j) \geq \frac{j-i}{2}$, $d(x_i, x_j) \geq \frac{j-i}{2}$ (cf. a et b, Th.I.1).

Slater dit que pour obtenir une relation optimale ($n \leq 10$), il ne faut pas oublier de commencer par la règle 1. Il donne un contre-exemple où cette règle a été omise. La deuxième règle ne peut s'appliquer mais la relation obtenue n'est pas optimale :

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1		1		1	1
2			1	1	1	1	1	1
3				1	1		1	
4	1				1	1	1	1
5						1	1	
6	1		1				1	1
7								1
8			1	1	1			

1ère règle non respectée
2ème règle non applicable
 $v(R) = 5$

	2	4	6	1	8	3	5	7
2		1	1		1	1	1	1
4			1	1	1		1	1
6				1	1	1		1
1	1				1	1	1	1
8						1	1	
3		1					1	1
5			1					1
7					1			

Relation optimale ($v(R)=4$)
obtenue à partir de
(2,4,1,6,3,8,5,7)

Mais le contre-exemple de Remage et Thompson montre que la première règle peut ne pas conduire à une relation optimale, par cette procédure, pour $n=10$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		1	1		1		1		1	1
2			1	1		1			1	1
3				1	1	1	1	1	1	1
4	1				1	1		1	1	1
5		1				1	1	1	1	1
6	1						1	1		1
7		1		1				1	1	
8	1								1	1
9				1		1				1
10			1		1		1			

1ère règle respectée
2ème règle non applicable
 $v(R) = 11$

	1	3	5	7	2	9	4	6	8	10
1		1	1	1	1	1				1
3			1	1		1	1	1	1	
5				1	1	1		1	1	
7					1	1	1		1	
2		1				1	1	1	1	1
9							1	1		1
4	1		1					1	1	1
6	1			1					1	1
8	1					1				1
10		1	1	1						

R optimale ($v(R) = 10$)

Remarquons également que la condition suivante plus forte que celle correspondant à la 1ère règle de Slater et qui la contient n'est ni nécessaire ni suffisante pour trouver une relation optimale:

$$1 \leq i \leq k < l \leq j \leq n \Rightarrow d(x_k, x_i^j) \geq d(x_l, x_i^j)$$

Elle semble pouvoir fournir néanmoins des relations "proches" de la relation optimale. Elle est à l'origine des algorithmes A et B proposés ci-dessous.

I.2.2. Algorithmes.

a) Algorithme de recherche d'une relation optimale.

Nous proposons un algorithme analogue à celui concernant les graphes quelconques (chap.3, III.3.4.) mais utilisant les conditions particulières aux tournois (Théorème I.1. et corollaire 2).

b) Algorithme A.

Soit $G = (X, U)$ un tournoi. Posons $G = G_0$.

1 - $p=0$, aller en 3

Si $p=n$, aller en 4

2 - Soit G_p le sous-graphe engendré par $X - \{1, \dots, p\}$

- 3 - Soit G'_p le sous-graphe de G_p engendré par les sommets de G_p de demi-degré extérieur maximal.
- Si $G_p = G'_p$, appeler $p+1$ l'un quelconque des sommets de G_p .
Faire $p := p+1$
Aller en 2
- Sinon, si G'_p n'a qu'un sommet, appeler ce sommet $p+1$.
Faire $p := p+1$, aller en 2 ; sinon $G_p := G'_p$, aller en 3.
- 4 - L'ordre croissant des sommets donne la relation cherchée.

c) Algorithme B (on procède par partitions).

- 1 - $p = 0$, $q = 0$, $G = G_0$, $X = X_0$.
- 2 - $G_p = (X_p, U_p)$ sous-graphe de G engendré par X_p .
- Si G_p a un seul sommet, faire $p := p+1$. Si $p = 2(n-1)$, aller en 3 ; Sinon aller en 2.
- Si G_p a plusieurs sommets, soit X_p^1, X_p^2 la partition de X_p telle que :
- si $X_p = E$ (ensemble des sommets de demi-degré extérieur maximal dans G_p), prendre pour X_p^1 l'un quelconque des sommets de X_p .
- si $X_p \neq E$, prendre $X_p^1 = E$ et $X_p^2 = X_p - X_p^1$.
- Classer les sommets dans X_p : $x_i < x_j$, $\forall x_i \in X_p^1$, $\forall x_j \in X_p^2$.
- Faire $X_{q+1} := X_p^1$, $X_{q+2} := X_p^2$, $p := p+1$, $q := q+2$; aller en 2.
- 3 - L'ordre croissant des sommets donne la relation cherchée.

II. TOURNOIS FORTEMENT CONNEXES C-MINIMAUX.

II.1. Propriétés.

Tout tournoi fortement connexe possède un circuit hamiltonien [Camion, 2]. Donc d'après la proposition I.7. (ch.1), dans un tournoi fccm G , tout arbre de circulation H de G est un chemin

hamiltonien, et d'après la proposition I.8. (ch.1), G a un seul circuit hamiltonien.

Cherchons le nombre de circuits élémentaires de longueur q ($3 \leq q \leq n$) d'un tournoi fccm G d'ordre n .

Proposition II.1. *Un tournoi fccm G d'ordre n possède $n-q+1$ circuits élémentaires de longueur q ($3 \leq q \leq n$) et $n-q+1$ seulement.*

Soit H un arbre de circulation de G . C'est un chemin hamiltonien. En numérotant convenablement les sommets de G , on peut noter: $H = [1, 2, \dots, n]$. Tout circuit élémentaire de G de longueur q est formé d'un chemin de H de longueur $q-1$ et d'un arc de $\bar{H}$. Soit $\mu_q = [i, i+1, \dots, i+q-1]$, $1 \leq i \leq n-q+1$, un tel chemin de H . Comme il y en a $n-q+1$, la proposition est démontrée.

On peut vérifier que le nombre total de tous ces circuits, q variant de 3 à n est : $\frac{(n-2)(n-1)}{2} = m-n+1$.

Cherchons maintenant le nombre d'arbres de circulation de G . Si $n = 3$, G a trois arbres de circulation qui sont ses trois chemins hamiltoniens. Mais :

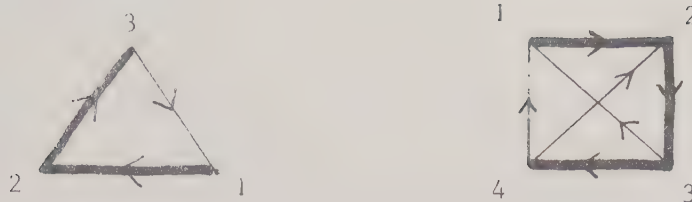
Proposition II.2. *Un tournoi fccm G d'ordre $n \geq 4$ possède un seul arbre de circulation.*

Soit H un arbre de circulation de G : $H = [1, 2, \dots, n]$. Soit $c_1 = [1, 2, \dots, n-1, 1]$ et $c_2 = [2, 3, \dots, n, 2]$ les deux circuits élémentaires de G de longueur $n-1$ ($n-1 \geq 3$).

Tout arbre de circulation de G a $n-2$ arcs dans c_1 et $n-2$ arcs dans c_2 . Pour H , ce sont $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-2, n-1)$ dans c_1 , $(2, 3), \dots, (n-2, n-1), (n-1, n)$ dans c_2 . On ne peut trouver d'autre chemin hamiltonien que H qui ait $n-2$ arcs dans c_1 et $n-2$ arcs dans c_2 .

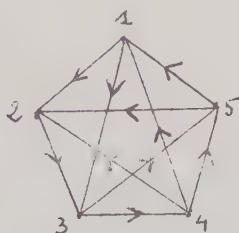
Remarque. On peut se demander si un tournoi ayant un circuit hamiltonien et un seul est fccm. Cette propriété est vraie pour $n=3$ et $n=4$ (D'ailleurs un tournoi de 3 ou 4 sommets ne peut avoir qu'un

seul circuit hamiltonien) :



Elle est fausse en général :

Contre-exemple ($n=5$) :



Seul circuit hamiltonien : $[1, 2, 3, 4, 5, 1]$

Ce graphe n'est pas fccm : il possède plus de 6 circuits élémentaires alors que $k = 6$. On peut également voir qu'il n'est pas fccm en constatant que les sommets 1 et 3 sont sur un même circuit élémentaire et qu'il existe deux chemins $[1, 3]$ et deux chemins $[3, 1]$.

II.2. Nombre de chemins hamiltoniens.

Soit G^n un tournoi fccm d'ordre n . Notons N^n le nombre de chemins hamiltoniens de G^n ($n \geq 3$). Comme précédemment, nous écrivons $H = [1, 2, \dots, n]$ l'unique arbre de circulation de G^n .

THEOREME II.1.

N^n est donné par la relation de récurrence :

$$N^n = N^{n-1} + N^{n-2} + N^{n-3}$$

en posant, par convention, $N^0 = N^1 = N^2 = 1$.

Remarquons d'abord que le graphe déduit de G^n en supprimant le sommet n et tous les arcs incidents à ce sommet est un tournoi fccm, d'ordre $n-1$, d'arbre de circulation $[1, 2, \dots, n-1]$, isomorphe à tout tournoi fccm d'ordre $n-1$.

Notons N_p^n le nombre de chemins hamiltoniens de G^n ayant pour extrémité initiale le sommet p :

$$N^n = N_1^n + N_2^n + \dots + N_n^n \quad (n \geq 3)$$

Lemme a) $N_3^3 = 3$, $N_3^3 = 1$

b) pour $n \geq 4$, si $p < n$, $N_p^n = N^{p-1}$

c) pour $n \geq 4$, $N_n^n = N^{n-1} - N_{n-1}^{n-1}$

a) immédiat.

b) Dans $G^n = (X, U)$, on a :

$(i, j) \in U$ si et seulement si ou bien $j = i+1$, ou bien $i > j+1$,
 $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Etablissons la liste des successeurs de chaque sommet.

1	2
2	3
3	4, 1
4	5, 1, 2
p	p+1, 1, 2, ..., p-2
p+1	p+2, 1, 2, ..., p-1
n-1	n, 1, 2, ..., n-3
n	1, 2, ..., n-2

Les chemins élémentaires de longueur maximale qui ne sont pas des circuits et qui ont pour extrémité initiale 1, 2, 3 sont uniques. Ce sont respectivement : $[1, 2, \dots, n]$, $[2, 3, 4, \dots, n, 1]$,
 $[3, 4, 5, \dots, n, 1, 2]$. Donc : $N_1^n = N_2^n = N_3^n = 1$.

Pour $4 \leq p \leq n$, tout chemin hamiltonien d'origine p est de la forme : $[p, p+1, \dots, n, A]$, A étant un chemin hamiltonien du graphe déduit de G^n en supprimant les sommets $p, p+1, \dots, n$ et les arcs

adjacents. Ce graphe étant un tournoi fccm d'ordre $p-1$, on peut dire que $N_p^n = N^{p-1}$.

c) Tout chemin hamiltonien de G^n d'extrémité initiale n est d'une des formes suivantes : $[n, 1, \dots]$, $[n, 2, \dots]$, $[n, 3, \dots]$, ..., $[n, n-2, \dots]$. On retrouve donc tous les chemins hamiltoniens de G^{n-1} déduit de G^n en supprimant n , sauf ceux qui ont pour extrémité initiale $n-1$ dans G^{n-1} , car $(n, n-1)$ n'est pas un arc de G^n . Par suite $N_n^n = N^{n-1} - N_{n-1}^{n-1}$.

A partir du lemme, on peut donc calculer N^n de proche en proche :

$$\begin{aligned} N^n &= N^0 + N^1 + N^2 + \dots + N^{n-2} + N_n^n \\ N^3 &= 3, \quad N_3^3 = 1 \quad \text{donc} \quad N_4^4 = 2 \\ N^4 &= N^0 + N^1 + N^2 + N_4^4 = 5, \quad N_4^4 = 2 \quad \text{donc} \quad N_5^5 = 3 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Mais établissons la formule du théorème. D'après le lemme :

$$N_n^n = N^{n-1} - N_{n-1}^{n-1} = N^{n-1} - N^{n-2} + N_{n-2}^{n-2} \quad (\text{pour } n-2 \geq 3)$$

$$N_n^n = N^{n-1} - N^{n-2} + N^{n-3} - N_{n-3}^{n-3} \quad (\text{pour } n-3 \geq 3)$$

On obtient ainsi :

$$N_n^n = N^{n-1} - N^{n-2} + N^{n-3} + \dots + (-1)^{n+p+1} N^p + \dots + (-1)^n N^3 + (-1)^{n+1}$$

Donc :

$$\begin{aligned} N^n &= (N^0 + N^1 + N^2 + N^3 + \dots + N^{n-2}) + N^{n-1} - N^{n-2} + N^{n-3} + \dots + (-1)^{n+p+1} N^p + \dots + \\ &\quad (-1)^n N^3 + (-1)^{n+1} \\ &= N^{n-1} + 2 N^{n-3} + \dots + [1 + (-1)^n] N^3 + (-1)^{n+1} + 3 \end{aligned}$$

D'où l'on tire :

$$N^{n+2} - N^n = N^{n+1} + N^{n-1} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Les premières valeurs de N^n sont : 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, ...

Remarque : N^n est impair : c'est vrai pour le nombre de chemins hamiltoniens d'un tournoi quelconque. [Berge, 6]

II.2.2. Expression générale de N^n et comportement asymptotique.

Posons $N^{n+3} = f(n)$. On a :

$$f(n+3) - f(n+2) - f(n+1) - f(n) = 0 \quad \text{avec} \quad f(0) = 3, f(1) = 5, f(2) = 9.$$

Soit f^* la fonction génératrice de la suite $f(n)$:

$$f^*(x) = f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \dots + f(n)x^n + \dots$$

Cherchons $f^*(x)$ sous forme de fraction rationnelle en x .

$$\text{Si } F(n) = f(n+1), \quad F^*(x) = \frac{f^*(x) - f(0)}{x}$$

$$\text{Si } F(n) = f(n+2), \quad F^*(x) = \frac{f^*(x) - f(0) - xf(1)}{x^2}$$

$$\text{Si } F(n) = f(n+3), \quad F^*(x) = \frac{f^*(x) - f(0) - xf(1) - x^2f(2)}{x^3}$$

D'où :

$$\frac{f^*(x) - f(0) - xf(1) - x^2f(2)}{x^3} - \frac{f^*(x) - f(0) - xf(1)}{x^2} - \frac{f^*(x) - f(0)}{x} - f^*(x) = 0$$

$$f^*(x) - f(0) - xf(1) - x^2f(2) - xf^*(x) + xf(0) + x^2f(1) - x^2f^*(x) + x^2f(0) - x^3f^*(x) = 0$$

$$\begin{aligned} (1 - x - x^2 - x^3)f^*(x) &= f(0) + xf(1) + x^2f(2) - xf(0) - x^2f(1) - x^2f(0) \\ &= f(0) + [f(1) - f(0)]x + [f(2) - f(1) - f(0)]x^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{f^*(x) = \frac{3 + 2x + x^2}{1 - x - x^2 - x^3}} \quad (1)$$

Soit la décomposition de $f^*(x)$ en éléments simples :

$$f^*(x) = \frac{P_1}{x - x_1} + \frac{P_2}{x - x_2} + \frac{P_3}{x - x_3} \quad (2)$$

$f^*(x)$ a un pôle réel x_1 et deux pôles complexes conjugués x_2 et $x_3 = \overline{x_2}$. On a : $0 < x_1 < 1$. ($x_1 \approx 0,545$).

x_2 et x_3 sont racines de $x^2 + px = q$ avec :

$$x^3 + x^2 + x - 1 = (x^2 + px + q)(x - x_1) \quad \text{d'où} \quad p = x_1 + 1, \quad q = \frac{1}{x_1}$$

Posons $x_2 = e^{\alpha + i\beta}$, $\overline{x_2} = e^{\alpha - i\beta}$. Alors : $p = -2\alpha \cos \beta$, $q = e^{2\alpha}$

D'où : $|x_2| = e^\alpha = \sqrt{q} = \frac{1}{\sqrt{x_1}} > x_1$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \log x_1 > 0.$$

$f^*(x)$ est développable dans le disque de rayon x_1 .

En développant chaque élément de (2) :

$$\frac{P_i}{x - x_i} = \frac{-\frac{P_i}{x_i}}{1 - \frac{x}{x_i}} = -\frac{P_i}{x_i} \left[1 + \frac{x}{x_i} + \dots + \frac{x^n}{x_i^n} + \dots \right],$$

on obtient :

$$\begin{aligned} f(n) &= -\frac{P_1}{x_1^{n+1}} - \frac{P_2}{x_2^{n+1}} - \frac{P_3}{x_3^{n+1}} \\ &= -\frac{P_1}{x_1^{n+1}} - \frac{P_2 \overline{x_2}^{n+1} + \overline{P_2} x_2^{n+1}}{(x_2 \overline{x_2})^{n+1}} \end{aligned}$$

La partie réelle de $P_2 \overline{x_2}^n$ est $\Re e(P_2 \overline{x_2}^n) = \varphi(n) e^{n\alpha}$.

D'où
$$f(n) = -\frac{P_1}{x_1^{n+1}} - \frac{2\varphi(n+1)e^{(n+1)\alpha}}{e^{2(n+1)\alpha}}$$

$\varphi(n)$ étant bornée et $\alpha > 0$, on a, quand n tend vers l'infini :

$$f(n) \approx -\frac{P_1}{x_1^{n+1}},$$

avec
$$P_1 = -\frac{x_1 + 1}{x_1^2(x_1 + 3)}$$

d'où
$$N^n \approx \frac{x_1 + 1}{x_1 + 3} \cdot \frac{1}{x_1^n}$$

La formule approchée de récurrence est : $N^n \approx 1,84 N^{n-1}$.

BIBLIOGRAPHIE

VAN AARDENNE. EHRENFEST T. ET DE BRUIJN N.C.

Circuits and trees in oriented linear graph.
Simon Stevin, 28, 1951, 203-217.

ADAM

Conjecture 2. (problems presented on special sessions of the symposium).
Proc. Symposium Smolenice, Prague 1964, 157

BALENSKI M.

On maximum matching , minimum coverings and their connections.
J. Combinat. Theory (à paraître).

BARBUT M.

Note sur les ordres totaux à distance minimum d'une relation binaire donnée.
Mathématiques et Sciences Humaines, n° 17, 1966

BASUT S.K.

Transformations on directed graphs.
J. Combinat. Theory 9, 1970, 244-256.

BRUTER C.

Vue d'ensemble sur la théorie des matroïdes.
Bull. Soc. Math. France, mémoire n° 17, 1969
(supplément au numéro de mars 1969).

BERGE C.

- 1 . Théorie des graphes et ses applications
Dunod, Paris, 1958.
- 2 . (et GHOUILA - HOURI A). Programme, jeux et réseaux de transport
Dunod, Paris, 1962.
- 3 . Some classes of perfect graphs.
Chap. 5, Graph Theory and Theoretical Physics (F.HARARY, éd)
Academic Press New York, 1967.
- 4 . Principes de combinatoire
Dunod, Paris 1968.
5. The rank of a family of sets. Recent progress in combinatorics
(W.TUTTE, éd). Academic Press New York, 1969, 49-57)
- 6 . Graphes et Hypergraphes
Dunod, Paris, 1970.

CAMION P.

- 1 . Quelques propriétés des chemins et circuits hamiltoniens dans la théorie des graphes.
Cahier du Centre de Recherche opérationnelle belge, Vol 2, n° 1, 1960
- 2 . Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets.
C.R. Acad. Sciences, T. 249, 1960, 2151-2152
- 3 . Characterization of totally unimodular matrices.
Proc. Am. Math. Soc., Vol 16, n° 5, 1965, 1068-1073
- 4 . Analyse de la portée explicative en théorie des graphes des propriétés de modules de points entiers. Théorie des graphes ICC (P. Rosenthal éd.)
Dunod - Gordon and Breach, 1967, 153-159
- 5 . Parité du nombre de circuits hamiltoniens dans les graphes complets antisymétriques.
Séminaire Berge, 3 Avril 1968.
- 6 . Modules unimodulaires,
J. Combinat. Theory, 4, 1968, 301-362

CHATY G.

- 1 . Algorithmes d'orientation progressive des graphes (Thèse 3ème cycle, Paris 1966)
- 2 . Graphes fortement connexes c -minimaux, C.R.Ac. Sc. Paris, 266, 1968, 907-909.
- 3 . Graphes fortement connexes c -minimaux et graphes sans circuit c -minimaux.
J. Combinat. Theory (à paraître).
- 4 . $(0,1)$ - Matrices, Factors in Graphs, Faithful graphs.
Int. Conf. on Combinatorial Mathematics (A. Gerwitz, L. Quintas, éd.)
Annals New York Ac. of. Sc. 175, 1970.
- 5 . Unicité de certains chemins dans des graphes fortement connexes.
C.R. Ac. Sc. Paris, 272, 1971, 710-713

CRESTIN J.P.

- 1 . Un algorithme d'orientation des arêtes d'un graphe connexe fini.
Miméographe du Séminaire sur les problèmes combinatoires, I H P, 1969.
- 2 . Piles et algorithmes de graphes,
Ecole Nationale Supérieure de Techniques avancées, Paris
Janvier 1971.

DENES J.

Connections between transformation semigroups and graphs,
Théorie des Graphes, I C C (P. Rosenthal, ed).
Dunod - Gordon and Breach, 1967, 93-101.

DERNIAME J.C.

Etude d'algorithmes pour les problèmes de cheminement dans les graphes finis.

Thèse 3ème cycle, Nancy, 1966.

DUCAMP A.

Sur la dimension d'un ordre partiel. Théorie des Graphes ICC (P. Rosenthal, ed.)
Dunod, Gordon and Breach, 1967, 103-112.

DURAND B.

A propos du problème du nombre minimum d'arcs à enlever pour supprimer les circuits d'un graphe (Bibliographie),
Mathématiques et Sciences humaines, n° 20.

EDMONDS J.

Covers and packings in a family of sets.
Bull Am. Math. Society. Vol 68, 1962

ERDÖS P, POSÁ L.

On independent circuits contained in a graph.
Canad. J. Math., 17, 1961, 347-352.

FULKERSON DR.

- 1 . (et RYSER HJ) Combinatorial properties of matrices of zeros and ones,
Canad. Journ. Math., 9, 1957, 371-377
- 2 . (et RYSER HJ) Widths and heights of $(0,1)$ matrices.
Canad. J. of Math., 13, 1961, 239-255
- 3 . (et RYSER HJ) Multiplicities and minimal widths for $(0,1)$ matrices,
Canad. J. of Math., 14, 1962, 498-508.

GHOUILA HOURI A.

- 1 . Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien
C.R. Acad. Sc. Paris, 251, 1960, 495-497.
- 2 . Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre,
C.R. Acad. Sc. Paris, 254, 1962, 1370-1371.
- 3 . Caractérisation des matrices totalement unimodulaires.
C.R. Acad. Sc. Paris, 254, 1962, 1192
- 4 . Flots et tensions dans un graphe,
Thèse, Gauthier Villars, Paris, 1964.

GILMORE P.C. and HOFFMAN A.J.

A characterization of comparability graphs
Canad. J. Math. 16, 1964, 539-548.

GRINBERG E and DAMBIT Ya

Some properties of graphs containing circuits.
Latv. Mat. Ezh. 1965, 65-70.

HABER

Term rank of $(0,1)$ matrices. Rend. Sem. Math. Padova, 30, (1960), 24-51.

HARARY F.

- 1 . Some properties of line digraphs.
Rend. Circ. Mat. Palermo, 9, 1961, 161-168.
- 2 . (et NORMAN R.Z., CARTWRIGHT D.) Structural models
John Wiley and Sons, Inc New York 1965. (traduction française : DUNOD Paris, 1968)

HOFFMAN A.J.

Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis.

Proc. Symposia in Applied Math., 10, 1960, 113-127.

KARTELEYN P.W.

Graph Theory and crystal physics. Graph theory and theoretical Physics (F. HARARY)éd.

Academic Press London, New York, 1967.

KAUFMANN A.

- 1 . (et MALGRANGE Y) Recherche des chemins et circuits hamiltoniens d'un graphe.
Revue française de Rech. Opérationnelle, 26, 1963, 61-72.
- 2 . Introduction à la combinatoire en vue des applications
Dunod, Paris, 1968.

KOTZIG A.

Des cycles dans les tournois. Théorie des Graphes, Rome ICC (P.Rosenthal éd.) Dunod- Gordon and Breach, 1967, 153-159.

LACAZE D.

Suppression des circuits d'un graphe par élimination d'un nombre minimum d'arcs.

Note non publiée.

LAS VERGNAS M.

Théorème de Rado et extensions

Seminaire Berge 21.1.70.

LAWLER E.L.

Covering problems : duality relations and a new method of solution.
SIAM J. Appl. Math., 14, 1966, n° 5.

MAGHOUT K.

- 1 . Sur la détermination des nombres de stabilité et du nombre chromatique d'un graphe.
C.R. Acad. Sc. Paris, 248, 1959, 3522-3523.
- 2 . Application de l'algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux programmes linéaires et quadratiques.
Cahier du Centre de Recherche opérationnelle belge.

MINTY G.J.

On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network programming.

Journal of Math. and Mechanics, 15, n° 3, 1968, 485-520.

MOON J.W.

Topics on tournaments.

Holt New York 1968.

MOYLES D.M. and THOMPSON G.L.

An algorithm for finding a minimum equivalent graph of a digraph.

Journ. of the Ass. for Comp. Mach., 16, n° 3, 1969, 455-460.

MURCHLAND

Construction of a basis of elementary circuits. Combinatorial structures and their applications (Calgary, Juin 1969)

Gordon and Breach, New York 1970, 285-288.

NASH WILLIAMS C.St. J.A.

Hamilton circuits in graphs and digraphs. The many facets of Graph Theory (G. CHARTRAND, S.F. KAPOOR, ed),

Springer Verlag, 1969, 237-243.

PAIR C.

Sur des algorithmes pour les problèmes de cheminements dans les graphes finis. Theorie des Graphes, Rome ICC (P. Rosenthal, éd).

Dunod, Paris 1967, 271-300.

PICARD C .F.

1 . Ordination des graphes avec circuits.

Seminaire Berge,, 18.3. 1965.

2 . Panorama des liaisons entre graphes et ordinateurs.

Théorie des graphes, Rome ICC (P. Rosenthal, éd).

Dunod, Paris, 1967, 301-314.

3 . Distributivité d'opérations sur les graphes

C.R. Acad. Sc. Paris, 270, 1970, 1219-21.

4 . Produit et somme de certains graphes quasi fortement connexes inférieurement, 271, 1970, 145-148.

5 . Graphes et questionnaires

Gauthier Villars, Paris 1971 (à paraître).

PICHAT E.

Contribution à l'algorithme non numérique dans les ensembles ordonnés

Thèse Grenoble 1970.

RAO V.V.B. and MURTI V.G.K.

Enumération of all circuits or cutsets of a graph.

Electron. Lett., 1970, Vol 6, n° 4.

ROY B.

- 1 . Cheminement et connexité dans les graphes
Thèse Paris 1962
- 2 . Suppression d'arcs d'un graphe (ou inversion de ceux-ci), en vue de le rendre sans circuit.
Note non publiée, 1965
- 3 . Algèbre moderne et Théorie des graphes,
Dunod, Paris, Tome 1, 1969, Tome 2, 1970.

RUSSELL REMAGE J.R. and THOMPSON Jr. W.A.

Maximum-likelihood paired comparison rankings.
Biometrika, 53, 1966, 143-149.

RYSER H.J.

- 1 . The term rank of a matrix,
Canad. J. Math, 10, 1958, 57-65.
- 2 . Traces of matrices of zeros and ones,
Canad. J. Math, 12, 1960, 463-476.
- 3 . Matrices of zeros and ones,
Bull. Amer. Math. Soc., 66, 1960, 442-464.
- 4 . Combinatorial Mathematics.
The Mathematical Association of America, Buffalo, USA
(Traduction française : Dunod, Paris, 1969).

SEKAMINA M.

On an algorithm for ordering of graphs. Combinatorial structures and their applications.
(Calgary Juin 1969)
Gordon and Breach, New York 1970, 393-395.

SLATER P.

Inconsistences in a schedule of paired comparisons
Biometrika, 48, 1961, 303-12.

SWAN R.G.

An application of Graph theory to algebra.
Proc. Am.Math. Soc., 14, 1963, 367-373.

TIERNAN J.C.

An efficient search algorithm to find the elementary circuits of a graph.
Communications of the ACM, 13, n° 12, 1970.

TUTTE W.T.

A class of abelian groups,
Canad. J. Math., 8, 1956, 13-28.

VARGA R.S.

Matrix Iterative Analysis.
Prentice-Hall, Inc. 1962.

UNIVERSITE de PARIS VI

11, Quai Saint Bernard - Paris 5

SERVICE DE LA SCOLARITE

Bureau des Enseignements du 3^e Cycle

tél. 336.25.25 et 325.12.21

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : D'ETAT
THESE DE : SCIENCES MATHÉMATIQUES

NOM : CHATY

Prénoms : Guy

né le 6 Mai 1934 à Bobigny Dép^t de la Seine

1^{ère} THESE : " Cheminements remarquables dans les graphes :
existence, obtention, conservation.

2^e THESE (Propositions faites par l'Université) :



Vu et Approuvé

PARIS, le 12. Juillet. 1971

Le Président

de l'Université de PARIS VI

